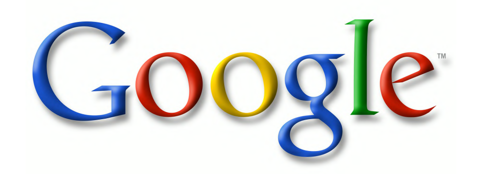


OSTWALD'S KLASSIKER
DER EXAKTEN WISSENSCHAFTEN.
Nr. 155.

ABHANDLUNGEN

ZUR

KRISTALLOGRAPHIE

VON

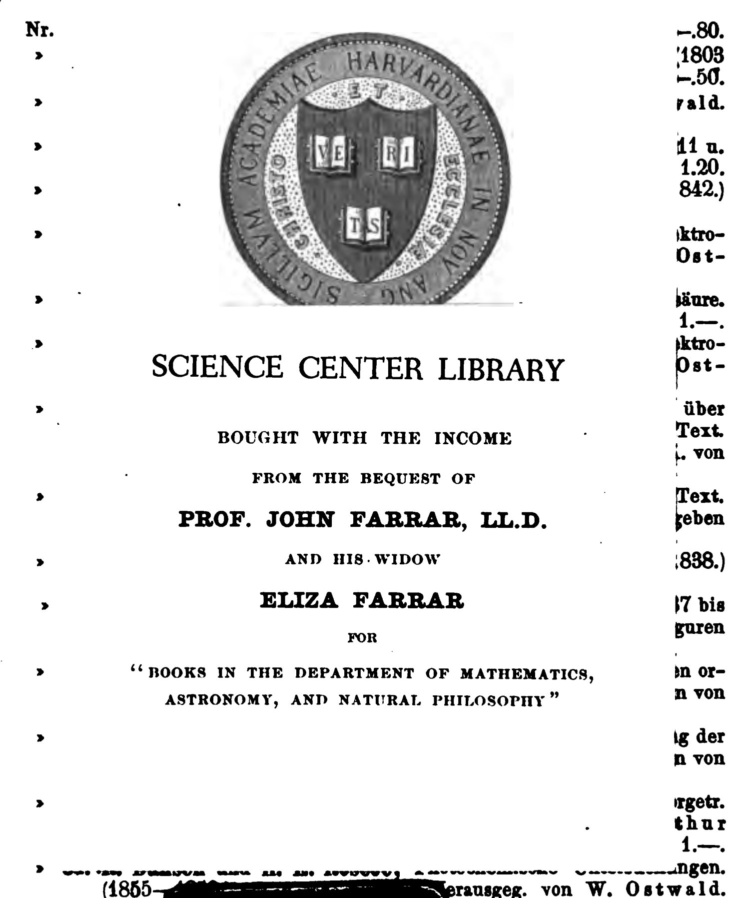
QUINTINO SELLA

WILHELM ENGELMANN IN LEIPZIG.

OSTWALDS KLASSIKER
DER
EXAKTEN WISSENSCHAFTEN

8. Gebunden.

Nr. —.80.
» 1803
—.50.
» vald.
» 11 u.
1.20.
» 842.)
» ktro-
Ost-
» säure.
1.—.
» ktro-
Ost-
» über
Text.
. von
» Text.
geben
» 838.)
» 17 bis
guren
» n or-
n von
» ıg der
n von
» rgetr.
thur
1.—.



» ngen.
(1855–[redacted]erausgeg. von W. Ostwald.
Mit 1[redacted].50.
» 35. Jacob[redacted]mten und einfachen Verhält-
nisse [redacted]estandteile der unorganischen
Natur [redacted]1811—1812.) Herausgegeben
von W[redacted]

Nr. 38. **R. Bunsen** und **H. E. Roscoe**, Photochemische Untersuchungen. (1855—1859.) II. Hälfte. Herausgegeben v. W. Ostwald. Mit 18 Figuren im Text. (107 S.) ℳ 1.60.

» 40. **A. L. Lavoisier** u. **P. S. de Laplace**, Zwei Abhandlungen über die Wärme. (Aus den Jahren 1780 u. 1784.) Herausg. von J. Rosenthal. Mit 13 Figuren im Text. (74 S.) ℳ 1.20.

» 42. **A. v. Humboldt** u. **J. F. Gay-Lussac**, Abhandl. über d. Volumgesetz gasförm. Verbindgn. Herausg. v. W. Ostwald. (42 S.) ℳ —.60.

» 44. Das Ausdehnungsgesetz der Gase. Abhandlungen von **Gay-Lussac, Dalton, Dulong** u. **Petit, Rudberg, Magnus, Regnault**. (1805-1842.) Herausgeg. von W. Ostwald. Mit 33 Textfig. (212 S.) ℳ 3.—.

» 45. **Humphry Davy**, Elektrochemische Untersuchungen. Vorgelesen in d. königl. Societät zu London als Bakerian Lecture am 20. Nov. 1806 und am 19. Nov. 1807. Herausgeg. von W. Ostwald. Mit 1 Tafel. (92 S.) ℳ 1.20.

» 52. **Aloisius Galvani**, Abhandlung üb. d. Kräfte der Elektricität bei der Muskelbewegung. (1791.) Herausgegeben v. A. J. v. Oettingen. Mit 21 Fig. auf 4 Tafeln. (76 S.) ℳ 1.40.

» 56. **Ch. Blagden**, Die Gesetze der Überkaltung und Gefrierpunktserniedrigung. 2 Abhandlungen. (1788.) Herausgegeben von A. J. v. Oettingen. (49 S.) ℳ —.80.

» 57. **Fahrenheit, Réaumur, Celsius**, Abhandlungen über Thermometrie. (1724, 1730—1733, 1742.) Herausgeg. von A. J. v. Oettingen. Mit 17 Textfiguren. (140 S.) ℳ 2.40.

» 58. **Carl Wilhelm Scheele**, Chemische Abhandlung von der Luft und dem Feuer. (1777.) Herausgeg. von W. Ostwald. Mit 5 Textfiguren. (112 S.) ℳ 1.80.

» 66. **J. W. Doebereiner** und **Max Pettenkofer**, Abhandlungen über die Anfänge des natürlichen Systems der chemischen Elemente, nebst einer geschichtlichen Übersicht der Weiterentwickelung der Lehre von den Triaden der Elemente. Herausgeg. von Lothar Meyer. (34 S.) ℳ —.60.

» 68. **Lothar Meyer** und **D. Mendelejeff**, Abhandlgn über das natürliche System der chemischen Elemente. (1864—1869 und 1869—1871.) Herausg. von Karl Seubert. Mit 1 Tafel. (134 S.) ℳ 2.40.

» 72. **G. Kirchhoff** und **R. Bunsen**, Chemische Analyse durch Spectralbeobachtungen. (1860.) Herausg. von W. Ostwald. Mit 2 Tafeln und 7 Figuren im Text. (74 S.) ℳ 1.40.

» 74. **Claude Louis Berthollet**, Untersuch. üb. die Gesetze d. Verwandtschaft. (1801.) Herausg. von W. Ostwald. (113 S.) ℳ 1.80.

» 75. **Axel Gadolin**, Abhandl. über die Herleitung aller kristallograph. Systeme mit ihren Unterabteilungen aus einem einzigen Prinzipe. (Gelesen den 19. März 1867.) Deutsch herausgeg. von P. Groth. Mit 26 Textfiguren und 3 Tafeln. (92 S.) ℳ 1.50.

» 86. **Michael Faraday**, Experimental-Untersuchungen über Elektricität. III. bis V. Reihe. Elektrolyse. (1833.) Mit 15 Figuren im Text. Herausg. von A. J. von Oettingen. (104 S.) ℳ 1.60.

» 87. —— —— VI. bis VIII. Reihe. Elektrolyse. (1834.) Herausg. von A. v. Oettingen. Mit 48 Figuren im Text. (180 S.) ℳ 2.60.

» 88. **Joh. Friedr. Christian Hessel**, Kristallometrie oder Kristallonomie und Kristallographie, auf eigentümliche Weise und mit Zugrundelegung neuer allgemeiner Lehren der reinen Gestaltenkunde, sowie mit vollständiger Berücksichtigung der wichtigsten Arbeiten und Methoden anderer Kristallographen. (1830.) I. Bändchen. Mit 8 Tafeln. Herausgeg. von E. Hess. (192 S.) ℳ 3.—.

» 89. —— —— (1830.) II. Bändchen. Mit 3 Tafeln. Herausg. von E. Hess. (165 S.) ℳ 2.80.

Ostwald, Wilhelm, editor.
Klassiker der exakten
wissenschaften, 155.

Abhandlungen

zur

Kristallographie.

Von

Quintino Sella.

Herausgegeben

von

F. Zambonini

in Neapel.

Mit 8 Figuren im Text.

Leipzig

Verlag von Wilhelm Engelmann

1906.

❦ ❦ ❦ ❦ ❦ ❦ ❦ ❦ ❦ ❦ ❦

[45]

Über das Verknüpfungsgesetz der Kristallformen einer Substanz.[1)]

1. Die Beziehung der verschiedenen Kristallformen, die eine Substanz zeigen kann, wenn man die Polymorphiefälle nicht berücksichtigt, wurde bis jetzt entweder durch die Achsen, auf die jede Fläche bezogen wird, oder durch die Zonen des Kristallsystems ausgedrückt. Der Zweck dieser Abhandlung ist, einen neuen Ausdruck dieses Gesetzes bekannt zu machen, sowie die Herleitung einiger für die theoretische und praktische Kristallographie wichtigen Schlüsse, aus den neuen oder aus den alten Ausdrücken durch Methoden, die von anderen nicht erforscht wurden[2)].

2. Das Gesetz der Achsen kann man wie folgt zusammenfassen: Es seien alle Kristallformen einer Substanz in geeigneter Weise geordnet, und seien die Durchschnittslinien drei oder mehrerer beliebiger Flächen als Achsen angenommen, so werden zwei andere beliebige Flächen die Achsen in solchen Entfernungen von ihrem gemeinsamen Anfang schneiden, daß ihr Quotient zu den Quotienten der analogen, auf jede der anderen Achsen gemessenen Entfernungen in rationalem Verhältnisse steht.

Nehmen wir die Durchschnittslinien dreier gegebener Flächen als Achsen und die Entfernungen der Punkte, in denen solche Achsen von einer vierten beliebigen Fläche durchschnitten werden, vom Koordinatenanfang, als Parameter an, so genügt es, um dieses Gesetz in aller Allgemeinheit experimentell zu beweisen, zu untersuchen, ob jede andere Fläche des Kristallsystems in bezug auf sie das oben erwähnte Gesetz befriedigt. Ist das der Fall, so kann man geometrisch beweisen, daß das

Gesetz auch gültig sein wird, wenn man die Durchschnittslinien anderer beliebiger Flächen als Achsen und die Entfernungen der Punkte, in denen eine andere beliebige Fläche solche Achsen schneidet, vom Anfangspunkte als Parameter annimmt.

3. Als Beobachtungstatsache setzen wir voraus, daß eine Kristallfläche in irgend einem Punkte des Raumes verschoben werden kann, ohne daß ihre kristallographische Lage beeinflußt wird, sobald sie sich selbst parallel bleibt.

Seien X, Y, Z drei recht- oder schiefwinklige Achsen, aus dem Zusammentreffen dreier gegebener Flächen entstanden; die Gleichung einer vierten, auf sie bezogenen Fläche kann

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

sein, wo a, b, c irrational sein können.

Die Gleichung jeder anderen Fläche, die wir, dem im 2. Art. ausgedrückten Gesetze gehorchend, annehmen, müßte von der Form

$$h\left(\frac{x}{a}\right)+k\left(\frac{y}{b}\right)+l\left(\frac{z}{c}\right)=e$$

sein, wo h, k, l rationale Zahlen bedeuten, während e beliebig irrational sein kann.

[46] Setzen wir in der vorstehenden Gleichung

$$\frac{x}{a}=x'; \quad \frac{y}{b}=y'; \quad \frac{z}{c}=z',$$

d. h. nehmen wir a als Maßstab auf der X-, b auf der Y-, c auf der Z-Achse an, so wird sie

$$hx'+ky'+lz'=e. \tag{A}$$

Für eine gegebene Fläche des Kristallsystems sind h, k, l Zahlen, deren Verhältnisse bestimmt und rational sind; e ist unbestimmt und kann rational, irrational und gleich Null sein.

Nach *Whewell* und *Miller* bezeichnen wir mit dem Symbol hkl die Fläche, deren Gleichung (A) ist.

4. Seien nun hkl, $h'k'l'$ zwei Flächen, deren Durchschnittslinie AB ist; diese Kante sei in A durch die Fläche mnp, in B durch die Fläche $m'n'p'$ begrenzt und in M von der Fläche $m''n''p''$ geschnitten. Es wird

$$\frac{AM}{AB}=\frac{Om'-Oa'}{Ob'-Oa'}$$

sein, und die Werte von Oa', Om', Ob' könnte man aus den x-Werten ableiten, die die zwei ersten Gleichungen befriedigen; wir schreiben sie so hin, daß wir sie mit den drei letzten nach und nach gleichzeitig bestehend annehmen.

$$\begin{aligned} hx' + ky' + lz' &= e, \\ h'x' + k'y' + l'z' &= e', \\ mx' + ny' + pz' &= f, \\ m'x' + n'y' + p'z' &= f', \\ m''x' + n''y' + p''z' &= f''. \end{aligned}$$

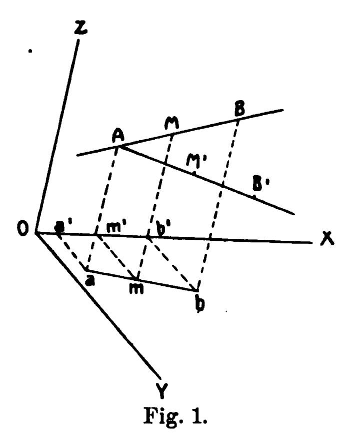


Fig. 1.

Aber auch ohne diese Gleichungen aufzulösen, bemerkt man, daß wir die berücksichtigten Flächen sich selbst parallel verschieben können, so daß e, e', f, f', f'' rational werden: wir schließen, daß $\frac{AM}{AB}$ in solchem Fall ein rationaler Quotient sein wird.

Ebenso rational wäre das Verhältnis $\frac{AM'}{AB'}$ der Segmente, die von denselben Flächen $m'n'p'$, $m''n''p''$ auf einer zweiten durch A gehenden Kante AB' des Kristallsystems bestimmt sind. Und umsomehr wird $\frac{AM}{AB} : \frac{AM'}{AB'}$ rational sein; dieses Verhältnis wird auch rational bleiben, wenn man die Flächen $m'n'p'$, $m''n''p''$ parallel zu sich selbst beliebig verschiebt, was zu beweisen war.

5. Man kann dasselbe elementar beweisen, unter Anwendung einiger Eigenschaften des Dreiecks, die zum Theorem des Ptolemäus gehören.

Fig. 2.

Wird ein Dreieck ABC durch eine Sekante geschnitten, so sind die Segmente, die sie auf den Seiten bildet, in Involution, nämlich

$$\frac{aB}{aC} \cdot \frac{bC}{bA} \cdot \frac{cA}{cB} = 1$$

[47] und daher, wenn die Verhältnisse der Segmente auf zwei Seiten rational sind, muß auch das Verhältnis der Segmente der dritten Seite rational sein.

Auch ist es leicht einzusehen, daß, wenn zwei gerade Linien *Aa*, *Bb* von zwei Ecken eines Dreiecks gezogen werden, so daß die gegenüberliegenden Seiten in Segmente geteilt werden, deren Verhältnisse $\frac{aB}{aC}$ und $\frac{bA}{bC}$ rational sind, auch die Verhältnisse $\frac{Oa}{OA}$, $\frac{Ob}{OB}$ der Teile rational sein müssen, in denen die gezogenen Linien sich gegenseitig teilen.

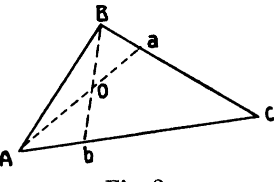


Fig. 3.

Sei nun *MNP* eine Fläche, die die drei Achsen in den Punkten *M*, *N*, *P* durchschneidet, und *M'N'P* eine zweite Fläche, die durch denselben Punkt *P* geht, wie die erste. Die Verhältnisse $\frac{OM'}{OM}$ und $\frac{ON'}{ON}$ werden rational sein, und daher auch $\frac{MQ}{MN}$.

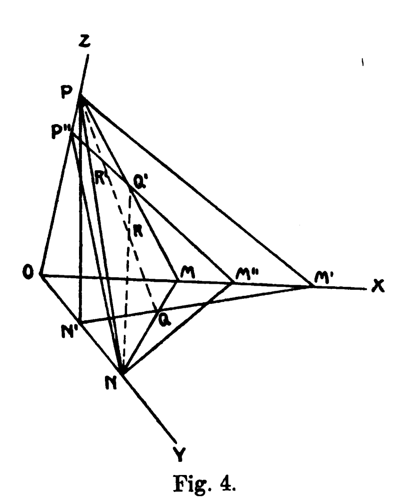


Fig. 4.

Wenn wir durch *N* eine dritte Fläche *M''NP''* gehen lassen, die den Durchschnitt der zwei vorstehenden *PQ* in *R* berührt, so wird auch $\frac{MQ'}{MP}$ rational sein. Hieraus ergibt sich weiter, daß $\frac{PR}{PQ}$ ebenso rational ist.

Man ziehe nun durch *N* eine andere Fläche, die *PQ* in *R'* berührt, so wäre auch $\frac{PR'}{PQ}$ rational und daher auch $\frac{PR'}{PR}$, w. z. b. w.

6. Bei Kristallzeichnungen und bei Anfertigung der Kristallmodelle muß man auch die absolute Entfernung berücksichtigen, in denen die Flächen die Achsen durchschneiden müssen. In diesem Falle handelt es sich nicht nur um den Bau von

Polyedern, deren Kantenwinkel die des Kristalls, den man darstellen will, sind, sondern auch um die Tatsache, daß man ihnen eine Form geben muß, die sich soviel als möglich der des Kristalls selbst nähert.

Naumann hat in seiner sehr vollständigen Kristallographie*) diese Aufgabe durch eine Reihe Auflösungen behandelt, die jedem Kristalltypus und jeder seiner einfachen Formen eigen sind. Er sucht die absoluten Längen der geschnittenen Kanten und der Segmente, die auf ihnen gemacht werden, aber die Auflösung der Aufgabe ist dadurch wegen der oft sehr komplizierten Wurzeln, die am Ende der Rechnung immer verschwinden, erschwert. Nach dem 4. Art. hat man eine sehr einfache Auflösung dieser Aufgabe, die von jeder Wurzel frei, allen Kristalltypen gemeinsam ist und sich nicht nur auf die einfachen holoedrischen, hemiëdrischen oder tetartoedrischen Formen, sondern auch auf alle denkbaren Flächenkombinationen ausdehnt.

7. Man habe wie im 4. Art. die Kante AB, die den zwei Flächen hkl, $h'k'l'$ gebildet und in A durch die Fläche mnp, in B durch die andere Fläche $m'n'p'$ begrenzt und in M von $m''n''p''$ geschnitten wird.

[48] Schreiben wir von neuem die Gleichungen dieser Ebenen hin:

$$\begin{aligned} hx' + ky' + lz' &= e, \\ h'x' + k'y' + l'z' &= e', \\ mx' + ny' + pz' &= f, \\ m'x' + n'y' + p'z' &= f', \\ m''x' + n''y' + p''z' &= f''. \end{aligned}$$

Setzt man nun

$$P = kl' - k'l \qquad \begin{matrix} h\ k\ l \\ \times \\ h'\ k'\ l' \end{matrix}$$

$$P' = k'p - nl' \qquad \begin{matrix} h'\ k'\ l' \\ \times \\ m\ n\ p \end{matrix}$$

$$P'' = nl - kp \qquad \begin{matrix} m\ n\ p \\ \times \\ h\ k\ l \end{matrix}$$

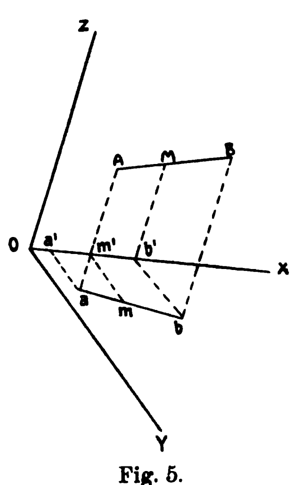


Fig. 5.

und bedeuten $P'_{\prime}P''_{\prime}$ und $P'_{\prime\prime}P''_{\prime\prime}$ die zu P' und P'' analogen Zahlen, die man durch Einsetzen von $m'n'p'$ und $m''n''p''$ für

*) *Naumann*, Lehrbuch der Kristallographie. Leipzig 1830.

mnp erhält, so erhalten wir für die Abszissen der Punkte A, B und M

$$X = \frac{fP + eP' + e'P''}{mP + hP' + h'P''},$$

$$X' = \frac{fP' + e'P'_{\prime} + e'P''_{\prime}}{m'P + hP'_{\prime} + h'P''_{\prime}},$$

$$X'' = \frac{f''P + eP'_{\prime\prime} + e'P''_{\prime\prime}}{m''P + hP'_{\prime\prime} + h'P''_{\prime\prime}}$$

und endlich

$$\frac{AM}{AB} = \frac{X'' - X}{X' - X}$$

haben.

Manchmal ist $X = X' = X''$. In diesem Falle wird man

$$\frac{AM}{AB} = \frac{Y'' - Y}{Y' - Y} = \frac{Z'' - Z}{Z' - Z}$$

nehmen, wo

$$Y = \frac{fQ + eQ' + e'Q''}{nQ + kQ' + k'Q''} \text{ usw.}$$

$$Z = \frac{fR + eR' + e'R''}{pR + lR' + l'R''} \text{ usw.}$$

$$Q = lh' - l'h \quad \text{usw.} \quad \begin{array}{cccc} h & k & l & h \\ & & \times & \\ h' & k' & l' & h' \end{array}$$

$$R = hk' - h'k \quad \text{usw.} \quad \begin{array}{ccc} h & k & l \\ & \times & \\ h' & k' & l' \end{array}.$$

8. Die Formeln des vorstehenden Artikels liefern eine sehr leichte Auflösung folgender Aufgaben:

1) Auf einer gegebenen Zeichnung oder einem Kristallmodell einen einer neuen Fläche entsprechenden Schnitt zu bestimmen. In diesem Falle sind die Zahlen e, e', f, f' von der schon vorliegenden Konstruktion des Modells oder der Zeichnung gegeben: f'' ist willkürlich, und man kann der Einfachheit wegen $f'' = 1$ setzen.

[**49**] 2) Die reziproken Entfernungen der verschiedenen Flächen des Modells so zu ordnen, daß die entstehende Form als passendste erscheine. In diesem Falle bestimmt man die Zahlen $ee'ff'f''$ usw. durch so viel Bedingungen, als die Figur, die das Modell zeigen soll, fordert. Häufig laufen verschiedene

Flächen in einem Punkt zusammen, daß mehrere Kanten gleichweit voneinander abstehen, und ähnliches: wenden wir auf diese Fälle die Formel des 7. Art. an, so können wir die wiederholten und lästigen Versuche vermeiden, auf die man bei der Zeichnung und bei der Konstruktion von Modellen sehr komplizierter Kristalle stößt.

3) Wenn das Symbol einer Fläche in bezug auf drei Achsen gegeben ist, das in bezug auf drei oder mehrere neue Achsen zu finden, als Durchschnitte dreier oder mehrerer gegebener Flächen*). Die Auflösung dieser Aufgabe kann als Spezialfall der ersten betrachtet werden[3].

9. Das Zonengesetz ist folgendes: **Jede Kristallfläche ist zu zwei oder mehreren Kanten parallel, die im Kristall schon vorhanden oder möglich sind.**

Sind vier Flächen gegeben[4], so schneiden sie sich in sechs Zonen, die auf Grund des in Rede stehenden Gesetzes drei neue mögliche Flächen liefern. Der Durchschnitt jeder dieser neuen Flächen mit den schon vorhandenen gibt zu einer neuen Reihe möglicher Flächen Veranlassung, und wenn wir dies ohne Ende fortsetzen, entstehen aus den vier gegebenen Flächen alle möglichen Formen des Kristallsystems.

Übrigens ist die Identität dieses Gesetzes mit dem des 2. Art. leicht einzusehen.

Seien hkl, $h'k'l'$ zwei mögliche Flächen des Kristallsystems, so werden die Gleichungen ihres Durchschnitts, den wir als durch den Koordinatenanfang gehend, annehmen,

$$\frac{x'}{kl'-k'l}=\frac{y'}{lh'-l'h}=\frac{z'}{hk'-h'k}, \quad \begin{matrix} h\,k\,l & h\,k\,l \\ & \times\times\times & \\ h'k'l' & h'k'l' \end{matrix}$$

sein und daher mit allen Koeffizienten rational. Man schließt daraus, daß die Gleichungen der möglichen Kanten oder Zonen eines Kristallsystems rationale Koeffizienten besitzen.

---

*) Die Aufgabe der Transformation der Achsen wurde von Herrn *de Sénarmont* in einer Autographie seiner Vorlesungen an der Bergschule Paris sehr elegant behandelt. **Démonstration de quelques formules d'une application fréquente dans les calculs cristallographiques.** 1 Février. Dort werden nicht nur, wie hier, die Symbole der Flächen in bezug auf die neuen Achsen betrachtet, sondern auch die Winkel, die letztere unter sich bilden, und die Länge der angenommenen Parameter.

Seien nun

$$\frac{x'}{r} = \frac{y'}{s} = \frac{z'}{t},$$

$$\frac{x'}{r'} = \frac{y'}{s'} = \frac{z'}{t'}$$

die Gleichungen von zwei beliebigen möglichen Kanten oder Zonen, die wir nach *Miller* durch die Symbole $[rst]$, $[r's't']$ darstellen: die Gleichung der ihnen parallelen Ebene wird

$$(st' - s't)x' + (tr' - t'r)y' + (rs' - r's)z' = 0 \qquad \begin{matrix} r\,s\,t \;\; r\,s\,t \\ \times\times\times \\ r's't' \;\; r's't' \end{matrix}$$

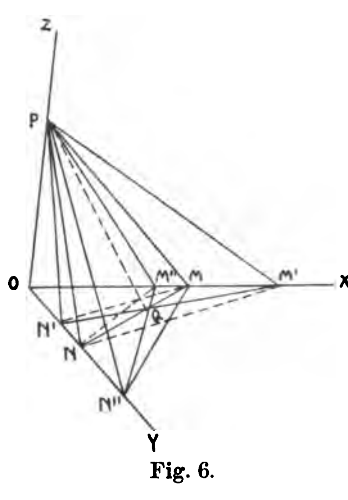


Fig. 6.

sein können und wird daher einer möglichen Fläche entsprechen, da $rstr's't'$ sämtlich rational sind.

[**50**] 10. Die Wichtigkeit des Zonengesetzes und seine außerordentliche Nützlichkeit in der praktischen Kristallographie ist von allen modernen Kristallographen hervorgehoben worden. Wir werden nur bemerken, daß man mit der elementarsten Geometrie die Bedingung ausdrücken kann, die die Flächen derselben Zone verbindet. Lassen wir durch einen Punkt P, der so gewählt ist, das $OP = 1$ ist, drei Flächen gehen, und nehmen wir an, daß sie die Zone PQ gemeinsam haben, so wird man z. B.

$$OM = \frac{p}{m}; \qquad ON = \frac{p}{n},$$

$$OM' = \frac{p'}{m'}; \qquad ON' = \frac{p'}{n'},$$

$$OM'' = \frac{p''}{m''}; \qquad ON'' = \frac{p''}{n''}$$

haben. Die Geraden MN, $M'N'$, $M''N''$ müssen sich nun in

einem einzigen Punkt schneiden: ziehen wir die Geraden $N'M$ und NM', so ergibt sich

$$N'MM' : N'NM' :: MQ : NQ,$$

und wenn $N''M''$ auch NM in Q schneidet, so ist das Verhältnis der analogen Dreiecke noch dasselbe, daher

$$N'MM' : N'NM' :: N''MM'' : N''NM'',$$

oder

$$ON'(OM' - OM) : OM'(ON - ON') :: ON''(OM'' - OM) \\ : OM''(ON - ON'')$$

und endlich

$$m''(np' - n'p) + n''(pm' - p'm) + p''(mn' - m'n) = 0 \quad \begin{matrix} m\,n\,p\;m\,n\,p \\ \times\times\times \\ m'n'p'\;m'n'p' \end{matrix}.$$

11. Man kann das Verknüpfungsgesetz der Kristallformen einer Substanz noch wie folgt ausdrücken:

Man habe ein Ellipsoid, dessen konjugierte Durchmesser drei Kristallkanten sind, die in ihrer Länge von einer vierten Fläche des Kristalls selbst begrenzt sind; jede mögliche Fläche wird der Diametralebene parallel sein, die mit einem zu einer möglichen Zone parallelen Durchmesser konjugiert ist; umgekehrt wird jede mögliche Zone zu dem Durchmesser parallel sein, der mit einer zu einer möglichen Fläche parallelen Diametralebene konjugiert ist.

Hieraus folgt, daß wenn das Ellipsoid mittels der vier zuerst angenommenen Flächen bestimmt ist, und aus dem Durchschnitt der vierten Fläche mit den drei anderen neue Zonen entstehen, die diesen konjugierten Diametralebenen mögliche Flächen sein werden. Der Durchschnitt dieser neuen Flächen mit den schon existierenden gibt neue Zonen und daher neue mögliche Flächen, die mit diesen Zonen konjugiert sind, und so leitet man nach und nach alle möglichen Flächen des Kristallsystems ab.

12. Sind a, b, c die Längen der konjugierten Achsen des Ellipsoids, so wird dessen Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

[51] sein, und wenn a, b, c wie im 3. Art. als Maßstäbe auf den X-, Y- und Z-Achsen angenommen werden, wird sie die Form der Kegelschnittsgleichung erhalten

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1.$$

Die Gleichung eines im Punkte x', y', z' des Ellipsoids endenden Durchmessers wird

$$\frac{X'}{x'} = \frac{Y'}{y'} = \frac{Z'}{z'}$$

sein, und die Gleichung der mit diesem Durchmesser konjugierten Diametralebene, die parallel zu der Ebene sein wird, die im Punkte x', y', z' das Ellipsoid berührt

$$x'X' + y'Y' + z'Z' = 0,$$

wo X', Y', Z' die Ordinaten des Durchmessers und der Diametralebene bedeuten.

Man habe nun eine mögliche Fläche hkl: die Gleichung der zu dieser Fläche parallelen Diametralebene wird

$$hX' + kY' + lZ' = 0$$

sein, und die Gleichung des zu dieser Fläche konjugierten Durchmessers

$$\frac{X'}{h} = \frac{Y'}{k} = \frac{Z'}{l}.$$

Dies zeigt, daß die mit der Fläche hkl konjugierte gerade Linie eine mögliche Zone ist, deren Symbol $[hkl]$ ist.

Man habe dagegen eine Kante oder mögliche Zone $[mnp]$; der ihr paralleler Durchmesser wird die Gleichungen

$$\frac{X'}{m} = \frac{Y'}{n} = \frac{Z'}{p}$$

haben, und die Gleichung der mit diesem Durchmesser konjugierten Diametralebene wird

$$mX' + nY' + pZ' = 0$$

sein, d. h. daß die mit einer Zone $[mnp]$ konjugierte Ebene eine mögliche Kristallfläche mit dem Symbol mnp ist.

13. Der Zusammenhang einer Zone mit ihrer konjugierten Fläche zeigt sich geometrisch durch die Gleichheit des Symbols, das beide darstellt, und ist in den physikalischen Eigenschaften der Kristalle nicht minder klar. Im allgemeinen kann man festhalten, daß, wenn eine Zone wichtig ist und dann häufig parallele Streifungen zeigt, ihre konjugierte Fläche durch Glanz und Vollkommenheit ausgezeichnet ist.

Die Zukunft wird zeigen, welche Beziehungen zwischen den verschiedenen Ellipsoiden bestehen, die in einem Kristall einer-

seits die Gesamtheit seiner verschiedenen physikalischen Eigenschaften darstellen, und dem geometrischen Ellipsoid, von dem wir gesprochen haben. *Dana*, *Brewster* u. a. nehmen selbst an, daß die Moleküle, aus denen die Kristalle bestehen, als ellipsoidal zu betrachten sind. Wir werden hier uns darauf beschränken, einige geometrische Eigenschaften der verschiedenen Kristalltypen herzuleiten, die besonders für das Studium der Zwillinge wichtig sind.

Im monometrischen Typus wird das Ellipsoid eine Kugel: daher ist jede zu einer Zone senkrechte Ebene eine mögliche Fläche; umgekehrt ist jede zu einer möglichen Fläche Senkrechte auch eine mögliche Zone oder Kante.

In dem dimetrischen und rhomboedrischen oder hexagonalen Typus handelt es sich um ein Rotationsellipsoid. Betrachten wir nur die zur Rotationsachse parallelen oder senkrechten Flächen und nur die zu dieser Achse senkrechten oder parallelen Zonen, so wird noch [**52**] wahr sein, daß jede zu einer Zone senkrechte Ebene eine mögliche Fläche ist, und daß jede zu einer Fläche Senkrechte eine mögliche Zone darstellt. Die anderen Flächen aber sind im allgemeinen nicht zu möglichen Kanten senkrecht.

In den anderen Kristalltypen ist das geometrische Ellipsoid, das ihre verschiedenen Formen verbindet, immer dreiachsig.

Im trimetrischen Typus ist eine der kristallographischen Achsen Haupthalbmesser des Ellipsoids: die zwei anderen stimmen entweder mit den übrigen Haupthalbmessern überein oder sind gegen diese gleich geneigt und untereinander gleich.

Im monoklinen Typus ist entweder nur eine der kristallographischen Achsen mit einem Haupthalbmesser des Ellipsoids übereinstimmend, oder alle drei sind von den Haupthalbmessern verschieden, und in diesem Falle sind zwei unter ihnen gleich und gegen einen der Haupthalbmesser gleich geneigt.

Im diklinen Typus sind alle drei kristallographischen Achsen von den Haupthalbmessern des Ellipsoids verschieden, nur zwei von ihnen sind Haupthalbmesser der Ellipse, nach der die Ebene, die sie enthält, das Ellipsoid durchschneidet.

Endlich haben die kristallographischen Achsen im triklinen Typus mit dem geometrischen Ellipsoid nur das gemein, daß sie von ihm konjugierte Halbmesser sind[5]).

---

[128]

Über die Transformation der Achsen in einem Kristallsystem.[6]

Man kann die wichtigsten kristallographischen Formeln sehr kurz und elegant ausdrücken, wenn man die von den jetzigen Analytikern in der Determinantenrechnung eingeführten Bezeichnungen anwendet*). Als Beispiel werden wir die für Transformation der Achsen dienenden Formeln bringen: Die Analytiker werden uns beschuldigen, und die mit dieser Lehre nicht vertrauten Kristallographen werden uns danken, wenn wir folgendes erwähnen: Unter einer Determinante von n-Ordnung versteht man eine Funktion von n^2 Größen, die der gemeinsame Nenner zum Wert einer jeden Wurzel von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten ist, in denen die n^2 Größen Koeffizienten sind**). Die Determinante wird in der Weise bezeichnet, daß man zwischen zwei vertikalen Strichen || n horizontale Zeilen schreibt, deren jede die n Koeffizienten jeder linearen Gleichung enthält, so daß die auf eine Unbekannte sich beziehenden Koeffizienten alle in derselben vertikalen Reihe sich befinden.

So z. B.

$$\begin{matrix} a\,b\,c\;a\,b\,c \\ \times\times\times \\ d\,e\,f\;d\,e\,f \end{matrix} \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = g(bf-ec)+h(cd-af)+i(ae-bd)$$

*) Diese Lehre wurde in Italien durch die Arbeiten von *Brioschi*, *Chiò*, *Faà di Bruno* u. a. eingeführt und war Gegenstand einer Vorlesung des letzteren an der Turiner Universität.

**) Wir wollen in dieser Weise nicht die beste Definition einer Determinante geben, sondern eine, die schneller zu unserem Ziele führt.

$$\begin{array}{cc} b & c \\ e & f \\ \times & \\ h & i \\ \times & \\ b & c \\ \times & \\ e & f \\ h & i \end{array} = \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = a(ei-fh)+d(hc-ib)+g(bf-ce),$$

denn das sind die Nenner der Wurzeln der Gleichungen

$$\begin{aligned} ax+by+cz &= \alpha \\ dx+ey+fz &= \beta \\ gx+hy+iz &= \gamma. \end{aligned}$$

Die Werte der Wurzeln selbst werden

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & b & c \\ \beta & e & f \\ \gamma & h & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & \alpha & c \\ d & \beta & f \\ g & \gamma & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & \alpha \\ d & e & \beta \\ g & h & \gamma \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}$$

sein.

[129] Wären α und β Null, so wären die Zähler der Wurzeln unabhängig von ghi.

Ferner ist es klar, daß

$$\begin{vmatrix} a+b+c & b\,c \\ d+e+f & e\,f \\ g+h+i & h\,i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\,b\,c \\ d\,e\,f \\ g\,h\,i \end{vmatrix}.$$

Untersucht man die kristallographischen Formeln, so findet man, daß viele von ihnen Determinanten sind und daher sich eignen, mit aller Kürze und Eleganz symbolisiert zu werden, während die betreffenden Theoreme mit der größten Einfachheit auftreten. So z. B.:

1) Drei oder mehr Flächen liegen in einer Zone, wenn die Determinante der Indizes irgend dreier von ihnen gleich Null ist.

Die Flächen mnp, $m'n'p'$, $m''n''p''$ sind in einer Zone, wenn

$$\begin{vmatrix} m & n & p \\ m' & n' & p' \\ m'' & n'' & p'' \end{vmatrix} = 0 .$$

Man kann das Theorem durch Vergleich dieser Determinanten mit der in den Lehrbüchern gegebenen Bedingung beweisen. Übrigens ist es für jeden klar, der sich dessen erinnert, daß die Indizes einer Fläche die Koeffizienten der Koordinaten in der Gleichung der Fläche selbst sind, denn die oben gegebene Bedingung zeigt nur, daß die drei betrachteten Flächen sich in unendlicher Entfernung schneiden.

2) Die Indizes einer zu zwei Flächen gemeinsamen Zone sind die mit den Indizes der Flächen gebildeten Determinanten zweiter Ordnung.

Die Indizes einer zu zwei Zonen gemeinsamen Fläche sind die mit den Indizes der Zonen gebildeten Determinanten zweiter Ordnung.

Die von den Flächen efg, hkl gebildete Zone wird als Symbol

$$\left[\begin{vmatrix} f & g \\ k & l \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} g & e \\ l & h \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix}\right]$$

haben, nämlich:

$$\left[\begin{vmatrix} e & f & g \\ h & k & l \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} e & f & g \\ h & k & l \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} e & f & g \\ h & k & l \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\right].$$

Von derselben Form wird auch das Symbol der Fläche sein, die zwei gegebene Zonen $[efg]$ $[hkl]$ enthält.

3) Gegeben ist eine Fläche uvw, man finde ihr Symbol $u'v'w'$ in bezug auf die drei Achsen, die aus dem Durchschnitt der Flächen efg, hkl, mnp entstehen, und auf denen als Parameter die Längen genommen werden, die zwischen ihrem Durchschnittspunkte mit der Fläche qrs und dem Koordinatenanfang enthalten sind.

Offenbar wird man haben:

$$\text{(A)} \quad u' : \frac{\begin{vmatrix} e & f & g \\ h & k & l \\ u & v & w \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e & f & g \\ h & k & l \\ q & r & s \end{vmatrix}} = v' : \frac{\begin{vmatrix} h & k & l \\ m & n & p \\ u & v & w \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} h & k & l \\ m & n & p \\ q & r & s \end{vmatrix}} = w' : \frac{\begin{vmatrix} m & n & p \\ e & f & g \\ u & v & w \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m & n & p \\ e & f & g \\ q & r & s \end{vmatrix}} .$$

[130] In der Tat ist das Verhältnis der von den Flächen *uvw* und *qrs* auf einer neuen Achse bestimmten Segmente dem Verhältnis der Abszissen der zwei Durchschnittspunkte dieser Flächen mit der neuen Achse gleich. Aus dem oben Gesagten folgt, da *efg*, *hkl*, *mnp* durch den Koordinatenanfang gehen, daß die Zähler der Werte der Abszissen von *uvw* und *qrs* unabhängig sind. Das Verhältnis dieser Abszissen wird daher dem umgekehrten Verhältnis ihrer Nenner gleich sein, d. h. einer Determinante der Koeffizienten der dem betrachteten Durchschnittspunkte gemeinschaftlichen Gleichungen.

Setzt man

$$\text{(K)} \qquad \frac{q}{e+h+m} = \frac{r}{f+k+n} = \frac{s}{g+l+p},$$

so werden die Zähler der Formel (A) alle gleich, und man hat

$$\text{(A}'\text{)} \qquad \frac{u'}{\begin{vmatrix} e & f & g \\ h & k & l \\ u & v & w \end{vmatrix}} = \frac{v'}{\begin{vmatrix} h & k & l \\ m & n & p \\ u & v & w \end{vmatrix}} = \frac{w'}{\begin{vmatrix} m & n & p \\ e & f & g \\ u & v & w \end{vmatrix}}.$$

Dieser Form entsprechend sind in den Lehrbüchern die Formeln der Transformation der Achsen gegeben, aber häufig liefern sie nicht die einfachsten Symbole, und dann ist es besser, die allgemeine Formel (A) beizubehalten.

Weil es immer erlaubt ist, z. B. αe, αf, αg statt *efg* zu nehmen, so sieht man, daß die Gleichungen (K) für *qrs* eine unendliche Zahl von Werten geben. Da aber dieselben Werte αe, αf, αg in den Formeln (A′) *efg* ersetzen müssen, so folgt, daß man $\alpha u'$, $\alpha v'$, $\alpha w'$ statt $u'v'w'$ hätte. Die einfachsten möglichen Zahlen für *efg*, *hkl*, *mnp* werden die einfachst mögliche Bezeichnung für *qrs* geben, aber nicht immer die einfachste für $u'v'w'$.

Man kann noch *efg* durch $\bar{e}f\bar{g}$ ersetzen; in diesem Falle wechselt *qrs*, und man hat $\bar{u}'v'\bar{w}'$ statt $u'v'w'$. Dies entspricht in der Tat dem Wechsel der Richtung, in der man die auf zwei Achsen bezogenen Abszissen, zu deren Bestimmung *efg* beiträgt, als positiv nehmen will. Übrigens wird man immer aus dem Vorzeichen der Koeffizienten von *uvw* in den Formeln (A′) die Richtung erkennen, nach der die Achsen als positiv angenommen bleiben, und man wird beliebig diese Richtung wechseln können, wenn man die Vorzeichen der Indizes *efg*, *hkl*, *mnp* vertauscht. Im allgemeinen kann man *pqr* so

wählen, daß eine gegebene Fläche ein gegebenes Symbol erhält. Die Werte von $u'v'w'$, die die Gleichungen (A′) befriedigen, sind nichts anderes, als die Zähler der Wurzeln dreier linearer Gleichungen, in denen ehm, fkn, glp Koeffizienten und uvw zweite Glieder sind. Er wird daher

$$(B') \qquad \frac{u}{mu'+ev'+hw'} = \frac{v}{nu'+fv'+kw'} = \frac{w}{pu'+gv'+lw'}$$

sein.

Ebenso erhielte man aus den Formeln (A):

$$(B) \quad \frac{u}{\begin{vmatrix} mu' & mnp \\ ev' & efg \\ hw' & hkl \\ 0 & qrs \end{vmatrix}} = \frac{v}{\begin{vmatrix} nu' & mnp \\ fv' & efg \\ kw' & hkl \\ 0 & qrs \end{vmatrix}} = \frac{w}{\begin{vmatrix} pu' & mnp \\ gv' & efg \\ lw' & hkl \\ 0 & qrs \end{vmatrix}}$$

[131] 4. Sind die Symbole der neuen Achsen, z. B. $[efg]$, $[hkl]$, $[mnp]$ gegeben, und behalten qrs, uvw, $u'v'w'$ ihre frühere Bedeutung, so hätte man

$$(A_1) \quad u' : \frac{eu+fv+gw}{eq+fr+gs} = v' : \frac{hu+kv+lw}{hq+kr+ls} = w' : \frac{mu+nv+pw}{mq+nr+ps} .$$

Ist dagegen

$$(K_1) \qquad \frac{q}{\begin{vmatrix} 1 & f & g \\ 1 & k & l \\ 1 & n & p \end{vmatrix}} = \frac{r}{\begin{vmatrix} e & 1 & g \\ h & 1 & l \\ m & 1 & p \end{vmatrix}} = \frac{s}{\begin{vmatrix} e & f & 1 \\ h & k & 1 \\ m & n & 1 \end{vmatrix}} ,$$

so wird man

$$(A_1') \qquad \frac{u'}{eu+fv+gw} = \frac{v'}{hu+kv+lw} = \frac{w'}{mu+nv+pw}$$

und

$$(B_1') \qquad \frac{u}{\begin{vmatrix} u' & f & g \\ v' & k & l \\ w' & n & p \end{vmatrix}} = \frac{v}{\begin{vmatrix} e & u' & g \\ h & v' & l \\ m & w' & p \end{vmatrix}} = \frac{w}{\begin{vmatrix} e & f & u' \\ h & k & v' \\ m & n & w' \end{vmatrix}}$$

haben.

Die Formeln dieses Artikels sind klare Folgerungen der entsprechenden des vorhergehenden Artikels, wenn man an den im 2. Art. gezeigten Zusammenhang denkt, wo das Symbol einer Zone mit dem der beiden Flächen, die die Zone bilden verbindet.

5. Wenn das Symbol $[uvw]$ einer Zone gegeben ist, das Symbol $[u'v'w']$ in bezug auf drei Achsen zu finden, die aus dem Durchschnitt von drei Flächen efg, hkl, mnp entstehen, auf denen man als Parameter die zwischen dem Koordinatenanfang, durch den diese Flächen gehen, und ihrem Berührungspunkt mit der Fläche qrs enthaltenen Längen annimmt.

Es wird offenbar

$$(\alpha)\quad \frac{u'}{(mu+nv+pw)\begin{vmatrix} e & f & g \\ h & k & l \\ q & r & s \end{vmatrix}} = \frac{v'}{(eu+fv+gw)\begin{vmatrix} h & k & l \\ m & n & p \\ q & r & s \end{vmatrix}} = \frac{w'}{(hu+kv+lw)\begin{vmatrix} m & n & p \\ e & f & g \\ q & r & s \end{vmatrix}}.$$

In der Tat, um z. B. u' zu finden, genügt es, das Verhältnis der Abszisse des Berührungspunktes der drei Flächen efg, hkl, die durch den Koordinatenanfang gehen, und mnp durch den Punkt dessen Ordinaten, durch die entsprechenden Parameter dividiert, uvw sind, zu der Abszisse des Berührungspunkts der drei Flächen efg, hkl und qrs zu bestimmen.

Es wird daher

$$u' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & f & g \\ 0 & k & l \\ mu+nv+pw & n & p \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e & f & g \\ h & k & l \\ m & n & p \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} 0 & f & g \\ 0 & k & l \\ 1 & r & s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e & f & g \\ h & k & l \\ q & r & s \end{vmatrix}}$$

sein, aus welchen Formeln die Relationen (α) folgen.

[132] Sind die Bedingungen (K) befriedigt, so wird

$$(\alpha')\quad \frac{u'}{mu+nv+pw} = \frac{v'}{eu+fv+gw} = \frac{w'}{hu+kv+lw},$$

$$(\beta')\quad \frac{u}{\begin{vmatrix} u' & n & p \\ v' & f & g \\ w' & k & l \end{vmatrix}} = \frac{v}{\begin{vmatrix} m & u' & p \\ e & v' & g \\ h & w' & l \end{vmatrix}} = \frac{w}{\begin{vmatrix} m & n & u' \\ e & f & v' \\ h & k & w' \end{vmatrix}}$$

sein.

6. Sucht man das neue Symbol der Zone in dem Falle, daß statt der Symbole der neuen Koordinatebenen die der neuen Achsen, nämlich $[efg]$, $[hkl]$, $[mnp]$, gegeben sind, so wird man

$$(\alpha_1)\quad \frac{u'}{\begin{vmatrix} h & k & l \\ m & n & p \\ u & v & w \end{vmatrix}(eq+fr+gs)} = \frac{v'}{\begin{vmatrix} m & n & p \\ e & f & g \\ u & v & w \end{vmatrix}(hq+kr+ls)} = \frac{w'}{\begin{vmatrix} e & f & g \\ h & k & l \\ u & v & w \end{vmatrix}(mq+nr+ps)}$$

haben, und wenn die Bedingung $(K_{,})$ genügt ist,

$$(\alpha'_1)\quad \frac{u'}{\begin{vmatrix} h & k & l \\ m & n & p \\ u & v & w \end{vmatrix}} = \frac{v'}{\begin{vmatrix} m & n & p \\ e & f & g \\ u & v & w \end{vmatrix}} = \frac{w'}{\begin{vmatrix} e & f & g \\ h & k & l \\ u & v & w \end{vmatrix}},$$

$$(\beta'_1)\quad \frac{u}{eu'+hv'+mw'} = \frac{v}{fu'+kv'+nw'} = \frac{w}{gu'+lv'+pw'}.$$

Wie *Miller* *) bewiesen hat, kommt man zu den Formeln (A), wenn die Rechnungen entwickelt werden, die in rein geometrischen Beweisen der fundamentalen kristallographischen Sätze in einer unserer früheren Arbeiten gegeben wurden **). Also kommt man leicht zu allen vorstehenden Formeln durch Anwendung der elementarsten Algebra und Geometrie.

Es sei uns erlaubt, unsere Meinung dahin zu äußern, daß die Symmetrie und die Eleganz der kristallographischen Formeln, wenn die *Miller*sche Bezeichnung angenommen wird, nicht wenig zur allgemeinen Annahme von seiten aller Geometer beitragen werden.

---

*) *Miller*, On the application of elementary Geometry to Crystallography. Philos. Mag., May 1857.

**) Sulla legge di connessione delle forme cristalline di una stessa sostanza. 1856. Nuovo cimento tom IV, p. 93.



[132]

Über die geometrischen Eigenschaften einiger Kristallsysteme.[7]

Der Beifall, den einige Kristallographen — und es genügt, den berühmten Professor von Cambridge*) zu erwähnen — unserem Versuch einer Anwendung der Geometrie auf die Kristallographie gezollt haben, hat uns veranlaßt, nach derselben Methode einige Sätze zu entwickeln, [133] die, wie wir glauben, bis jetzt nicht in aller Allgemeinheit veröffentlicht worden sind, die aber die Untersuchung der in dieser Abhandlung beschriebenen Kristalle fördern. Und wir tun dies um so lieber, weil wir glauben, daß man die Kristallographie mit der elementaren Geometrie allein fast vollkommen entwickeln kann. Diese Wissenschaft wäre daher viel leichter für jeden, der in rein naturwissen-

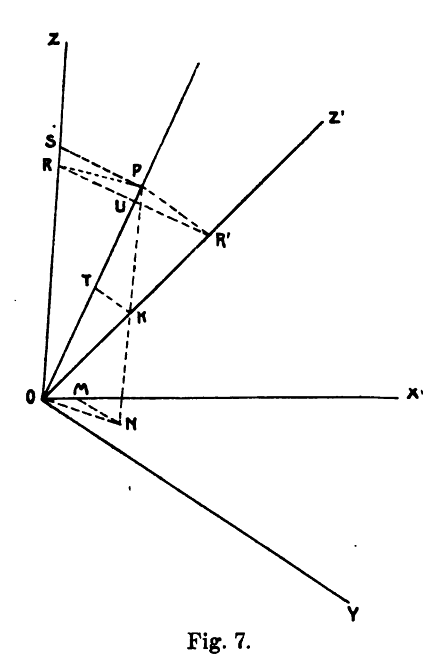


Fig. 7.

*) *Miller*, On the application of elementary Geometry to Cristallography. Philos. Mag., May 1857.

schaftlichen oder chemischen Studien geübt, nicht Gelegenheit hatte, sich früher mit analytischer Geometrie und sphärischer Trigonometrie vertraut zu machen.

Unsere Aufgabe ist, einige geometrische Eigenschaften darzustellen, die für die Kristallsysteme gelten, in denen das Produkt jedes Parameters durch sich selbst oder durch die Projektion irgend eines anderen Parameters auf ihn eine rationale Zahl ist.

1. Jede zu einer möglichen Kante senkrechte Ebene ist mögliche Fläche, und jede zu einer möglichen Fläche senkrechte Gerade ist mögliche Kante.

Es seien OX, OY, OZ die Kristallachsen und OP eine mögliche Kante.

Bedeuten abc die drei Parameter auf den genannten Achsen, die die betrachtete Substanz bestimmen, a' die Projektion des Parameters a auf die Achse OY, b' — des Parameters b auf OZ und c' — des Parameters c auf OX. Man wird diesen Projektionen das positive oder negative Vorzeichen erteilen, je nachdem sie auf die Achsen oder auf ihre Verlängerung fallen.

Ist $[mnp]$ das Symbol der Kante OP, so wird

$$OM = ma; \quad MN = nb; \quad NP = pc$$

sein.

Man ziehe PS auf OP senkrecht, und es sei $OR = PN$ und RU auf OP senkrecht, so wird man

$$OS = \frac{OP \cdot OR}{OU} = \frac{2 \cdot PN \cdot \overline{PO}^2}{\overline{PO}^2 + \overline{PN}^2 - \overline{ON}^2}$$

haben.

Aus der elementaren Geometrie ist es bekannt, (und es ist offenbar, wenn man bedenkt, daß die Projektion von ON auf NP nichts anderes ist, als die Summe der Projektionen von OM und MN auf PN), daß

$$\overline{ON}^2 = m^2a^2 + n^2b^2 + 2mna'b,$$

$$\overline{OP}^2 = m^2a^2 + n^2b^2 + p^2c^2 + 2mna'b + 2npb'c + 2pmc'a;$$

woraus

$$\frac{c}{OS} = \frac{pc^2 + mc'a + nb'c}{m^2a^2 + n^2b^2 + p^2c^2 + 2mna'b + 2npb'c + 2pmc'a}.$$

Dieser Ausdruck wird rational sein, wenn a^2, b^2, c^2, $a'b$, $b'c$, $c'a$ rational sind, gerade so wie wir es vorausgesetzt haben.

Ähnliche Ausdrücke erhält man für die Verhältnisse zwischen den Parametern a und b und den [**134**] Segmenten, die durch die zu OP senkrechten Geraden bestimmt sind, die die Achsen OX und OY durchschneiden. Nun sind solche Verhältnisse genau die Indizes der zur Kante OP senkrechten Ebene, und daher ist diese Ebene eine mögliche Fläche.

2. Das Symbol einer zur Kante $[mnp]$ senkrechten Fläche und das einer zur Fläche mnp senkrechten Kante zu bestimmen.

Aus dem vorher Gesagten erhellt, daß das Symbol der zur Kante $[mnp]$ senkrechten Fläche

$$(1)\quad ma^2+na'b+pc'a,\quad nb^2+pb'c+ma'b,\quad pc^2+mc'a+nb'c$$

ist.

Das Symbol der zur Fläche mnp senkrechten Kante wird man erhalten, wenn man durch die Werte (1) die Indizes einer solchen Kante sucht, daß das Symbol der zu ihr senkrechten Fläche mnp wird. Das Symbol der gesuchten Kante ist offenbar

$$(2)\quad \left[\begin{vmatrix} m & a'b & c'a \\ n & b^2 & b'c \\ p & b'c & c^2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a^2 & m & c'a \\ a'b & n & b'c \\ c'a & p & c^2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a^2 & a'b & m \\ a'b & b^2 & n \\ c'a & b'c & p \end{vmatrix}\right].$$

Dieses Symbol wird rational sein, wenn unsere Hypothese über die Parameter befriedigt ist.

Sind die Achsen rechtwinklig, so wird

$$(1')\qquad ma^2 \quad nb^2 \quad pc^2$$

das Symbol der zu $[mnp]$ senkrechten Fläche und

$$(2')\qquad \left[\frac{m}{a^2} \quad \frac{n}{b^2} \quad \frac{p}{c^2}\right]$$

das Symbol der zu mnp senkrechten Kante sein.

3. In den oben besprochenen Kristallsystemen ist das Verhältnis der Tangenten der von tautozonalen Flächen gebildeten Winkel rational.

Dies bedeutet, daß, wenn man verschiedene in derselben Zone liegende Flächen betrachtet, das Verhältnis der Tangenten der Winkel dieser Flächen untereinander rational sein wird.

Der Satz ist die offenbare Folge des vorherstehenden und des allgemeinen Verknüpfungsgesetzes der Kristallformen einer Substanz.

In der Tat ist die zu einer beliebigen Fläche F senkrechte Gerade mögliche Kante und kann daher als Achse angenommen werden. Betrachten wir nun viele andere Flächen, die alle durch dieselbe Gerade gehen, die zu der mit der Fläche F gemeinsamen Zone parallel ist, so werden die Verhältnisse der Längen, die sie auf der neuen, zu F senkrechten Achse bestimmen, rational sein. Aber die Verhältnisse dieser Längen sind genau den Verhältnissen der Tangenten der Winkel gleich, die diese Flächen mit F bilden; daher sind auch die Verhältnisse der Tangenten der von jeder Fläche F gebildeten Winkel rational, und endlich sind auch die Verhältnisse der Tangenten der Winkel rational, die von beliebigen Flächen gebildet werden, wenn diese Flächen mit F in derselben Zone liegen[8]).

4. Das Verhältnis der Tangenten der von tautozonalen Flächen gebildeten Winkel zu bestimmen.

Es seien mnp, hkl, efg drei tautozonale Flächen; es wird

$$\begin{vmatrix} m & n & p \\ h & k & l \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0$$

sein.

[**135**] Sei nun $[m'n'p']$ die zur Fläche mnp senkrechte Kante, und bedeuten $m'n'p'$ die von der Formel (2) gegebenen Indizes.

Nehmen wir als neue Achsen

$$[m'n'p'], \quad [0\ 1\ 0], \quad [0\ 0\ 1]$$

an, so werden die neuen Symbole der Flächen mnp, hkl, efg (siehe Formel (A'_1) des Anhanges A *)

$$\begin{matrix} m'm + n'n + p'p & n & p \\ m'h + n'k + p'l & k & l \\ m'e + n'f + p'g & f & g \end{matrix}$$

sein, und wenn man diese Flächen z. B. durch denselben Punkt der Achse OY gehen läßt, so werden die Segmente, die sie auf der neuen Achse $[m'n'p']$ bilden, im Verhältnis der Zahlen

*) Sie ist die zweite Abhandlung dieses Heftes.

$$\frac{n}{m'm+n'n+p'p}, \quad \frac{k}{m'h+n'k+p'l}, \quad \frac{f}{m'e+n'f+p'g}$$

stehen, und daher offenbar

$$\frac{\operatorname{tang} mnp, hkl}{\operatorname{tang} mnp, efg} = \frac{\dfrac{k}{m'h+n'k+p'l} - \dfrac{n}{m'm+n'n+p'p}}{\dfrac{f}{m'e+n'f+p'g} - \dfrac{n}{m'm+n'n+p'p}} =$$

$$= \frac{m'e+n'f+p'g}{m'h+n'k+p'l} \cdot \frac{m'\begin{vmatrix} m & n \\ h & k \end{vmatrix} - p'\begin{vmatrix} n & p \\ k & l \end{vmatrix}}{m'\begin{vmatrix} m & n \\ e & f \end{vmatrix} - p'\begin{vmatrix} n & p \\ f & g \end{vmatrix}}.$$

Da nun efg, hkl, mnp in einer Zone liegen, so kann man

$$(3) \qquad \frac{\operatorname{tang} mnp, hkl}{\operatorname{tang} mnp, efg} = \frac{m'e+n'f+p'g}{m'h+n'k+p'l} \cdot \frac{\begin{vmatrix} m & n \\ h & k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m & n \\ e & f \end{vmatrix}}$$

schreiben.

Daher kann man ferner die Tangenten der von beliebigen in derselben Zone liegenden Flächen gebildeten Winkel bestimmen.

Es wäre leicht, der vorstehenden Aufgabe, den Formeln und dem Beweise eine einfache und elegante, rein geometrische Form zu geben.

5. Wird immer die anfangs besprochene Hypothese festgehalten, so gilt der Satz:

An jedem Zwilling, an dem die Zwillingsachse eine mögliche Kante oder die zu einer möglichen Fläche Senkrechte ist, ist eine beliebige Fläche eines Individuums mögliche Fläche des anderen.

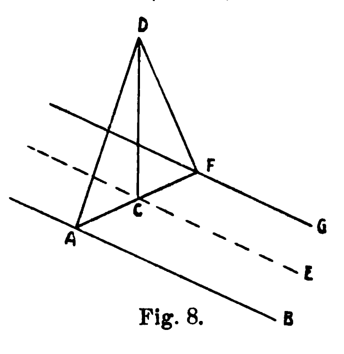


Fig. 8.

Es sei CD die Zwillingsachse und CAB die zu dieser Achse senkrechten Ebene, welche (1. Art.) mögliche Fläche ist.

Nun sei DAB eine beliebige Fläche, die die Ebene CAB in AB schneidet. Da CD mögliche Kante ist, [136] so kann

durch sie eine Ebene CAD gehen, die mögliche Fläche ist. Man nehme nun als Achsen CD, CE, zu AB parallel, und CF, das gleich CA ist und sich auf deren Verlängerung befindet, und man ziehe FG zu CE parallel: DFG wird eine mögliche Fläche sein.

Nun ist DFG genau die Lage, die DAB hätte, wenn man sie 180° um CD drehte; also bleibt eine Fläche eines Kristallsystems, an dem die oben aufgestellte Hypothese über die Parameter gültig ist, mögliche Fläche, wenn man sie 180° um eine mögliche Kante dreht.

6. Das Symbol der Achsen OX', OY', OZ', mit denen die Achsen OX, OY, OZ zusammenfallen, wenn man sie um 180° um die Kante $[mnp]$ dreht, zu finden.

In der dem 1. Art. beigefügten Figur sei OP die Zwillingsachse, und man nehme an, daß die Achse OZ um 180° um OP gedreht werde, so daß sie nach OZ' gelangt. OZ' muß mögliche Kante des Kristallsystems und daher $\frac{NK}{c}$ rational sein.

Die Dreiecke $OR'P$, ONP sind untereinander gleich, und daher wird der Punkt K auf TK liegen, welches in der Mitte von OP zu OP senkrecht ist, es wird daher

$$\frac{NK}{c} = \frac{NP - OK}{c} = p - \tfrac{1}{2}\frac{OS}{c}$$

sein, und wenn man den Wert von OS aus dem 1. Art. annimmt,

$$\frac{NK}{c} = \frac{p^2c^2 - m^2a^2 - n^2b^2 - 2mna'b}{2(pc^2 + mc'a + nb'c)}.$$

Ähnliche Gleichungen würde man auch für OX' und OY' erhalten, mit denen die Achsen OX und OY nach einer Drehung von 180° um OP zusammenfallen, und die Symbole der neuen Achsen werden

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} \left[\dfrac{m^2a^2 - n^2b^2 - p^2c^2 - 2npb'c}{2(ma^2 + na'b + pc'a)}\quad n \quad p\right] \\ \left[m \quad \dfrac{n^2b^2 - p^2c^2 - m^2a^2 - 2pmc'a}{2(nb^2 + pb'c + ma'b)}\quad p\right] \\ \left[m \quad n \quad \dfrac{p^2c^2 - m^2a^2 - n^2b^2 - 2mna'b}{2(pc^2 + mc'a + nb'c)}\right] \end{array}\right.$$

sein.

Sind nun $m'n'p'$ die Indizes der zur Kante $[mnp]$ senkrechten Fläche, wie sie von den Formeln (2) gegeben sind, und $D = OP$ die Diagonale des auf ma, nb, pc errichteten Parallelepipedon, so könnte man die Formeln (4) wie folgt schreiben:

$$(4)\qquad \begin{cases} \left[m - \dfrac{D^2}{2m'} \quad n \quad p\right] \\ \left[m \quad n - \dfrac{D^2}{2n'} \quad p\right] \\ \left[m \quad n \quad p - \dfrac{D^2}{2p'}\right]. \end{cases}$$

[137] Sind die Achsen rechtwinklig, so werden die Achsen in der neuen Lage, wie leicht zu beweisen wäre,

$$(4')\qquad \begin{cases} \left[\dfrac{m^2a^2 - n^2b^2 - p^2c^2}{2ma^2} \quad n \quad p\right] \\ \left[m \quad \dfrac{n^2b^2 - p^2c^2 - m^2a^2}{2nb^2} \quad p\right] \\ \left[m \quad n \quad \dfrac{p^2c^2 - m^2a^2 - n^2b^2}{2pc^2}\right] \end{cases}$$

sein.

7. Die Zwillingsachse $[mnp]$ und das Symbol uvw einer Fläche eines Individuums des Zwillings sind gegeben: das Symbol $u'v'w'$ derselben Fläche, auf die Achsen des anderen Individuums bezogen, zu bestimmen.

Um die Aufgabe zu lösen, genügt es, in den Formeln (A_1) des Anhangs A die Zahlen efg, hkl, mnp durch die von den Formeln (4) gegebenen zu ersetzen, indem man qrs so legt, daß die zu $[mnp]$ senkrechte Zwillingsebene dasselbe Symbol in bezug auf die neuen, wie auf die alten Achsen hat.

Man findet daher

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{u'}{2m'(mu + nv + pw) - uD^2} \\ = \dfrac{v'}{2n'(mu + nv + pw) - vD^2} \\ = \dfrac{w'}{2p'(mu + nv + pw) - wD^2} \end{cases}$$

und wenn die Achsen rechtwinklig sind,

$$(5')\quad \begin{cases} \dfrac{u'}{2ma^2(mu+nv+pw)-u(m^2a^2+n^2b^2+p^2c^2)} \\ =\dfrac{v'}{2nb^2(mu+nv+pw)-v(m^2a^2+n^2b^2+p^2c^2)} \\ =\dfrac{w'}{2pc^2(mu+nv+pw)-w(m^2a^2+n^2b^2+p^2c^2)}\,. \end{cases}$$

Z. B. am dimetrischen Bor, an dem

$$[m\,n\,p]=[1\,0\,1];\quad a:b:c::\sqrt{3}:\sqrt{3}:1$$

ist, wird

$$\frac{u'}{u-3w}=\frac{v'}{-2v}=\frac{w'}{-u-w}$$

sein.

Wenn, wie es oft der Fall ist, die Zwillingsachse in einer Symmetrieebene des Kristallsystems liegt, kann man mehrere Zwillingsachsen oder -ebenen annehmen.

Ist [1 0 1] am dimetrischen Bor Zwillingsachse, so wird auch 3 0 1 auf Grund der Formel (1)′ Zwillingsebene sein. Aber ebenfalls ist auch 1 0 1 Zwillingsebene, und daher wird auch [1 0 3] nach der Formel (2′) Zwillingsachse sein können.

8. Die anfangs besprochene Hypothese angenommen, wird jedes Kristallsystem mit schiefwinkligen Achsen aus rechtwinkligen Achsen hergeleitet werden können.

[**138**] In der Tat, behält man eine der alten, den schiefwinkligen Achsen entsprechenden Koordinatenebenen, so kann man als Achse die zu dieser Ebene Senkrechte nehmen, die auf Grund des im 1. Art. festgestellten Satzes mögliche Kante ist.

Wird die zweite Koordinatenebene durch diese Senkrechte und durch eine der in der beibehaltenen alten Koordinatenebene liegenden Achse bestimmt, so kann man als dritte Achse die zur zweiten so festgesetzten Ebene senkrechte Gerade annehmen.

In dieser oder in anderer Weise könnte man auf unendlich viele Arten schiefwinklige Achsen durch rechtwinklige ersetzen, aber die Symmetriegeraden des Kristallsystems stimmten nicht für jede gewählte Methode mit den entstandenen rechtwinkligen Achsen überein [9]).

9. Behält man die anfangs erwähnte Hypothese über die Parameter bei,

so wird unter einem gewissen Gesichtspunkte als für eine Substanz*) charakteristisches geometrisches Ellipsoid eine Kugel angenommen werden können.

Man habe eine Kugel, und man bezeichne auf ihr die Berührungspunkte ihrer Oberfläche mit drei beliebigen Flächen des betrachteten Kristallsystems, so werden die Radien der Kugel mögliche Kanten sein. Die zu zwei dieser Kanten parallelen Ebenen werden mögliche Flächen sein, und sie werden neue Punkte auf der Kugel liefern, so daß man in dieser Weise alle Flächen und Kanten des Kristallsystems herleiten kann.

Ein Unterschied findet aber zwischen dieser Kugel und dem geometrischen Ellipsoid statt, das wir in unserer erwähnten Arbeit definiert hatten, weil der einem Punkte der Kugeloberfläche zukommende Radius nicht die konjugierte Kante der vom Kugelpunkte dargestellten Fläche sein wird.

10. Es ist sehr wichtig, die Kristalltypen zu bestimmen, die die gemachten Hypothesen über die Parameter befriedigen und aus dem monometrischen System hergeleitet werden können.

Man setze voraus, daß der in Betracht stehende Kristalltypus schon auf rechtwinklige Achsen bezogen sei, deren Parameter $\sqrt{a}\,\sqrt{b}\,\sqrt{c}$ sind: man würde drei im monometrischen System mögliche Kanten finden, die untereinander senkrecht sind und, von einer möglichen Fläche durchschnitten, drei mögliche Längen liefern, die untereinander im Verhältnis $\sqrt{a} : \sqrt{b} : \sqrt{c}$ stehen.

Es seien $[xyz]$, $[x'y'z']$, $[x''y''z'']$ die drei Kanten und mnp die gesuchte Fläche. Es würde

$$\sqrt{a}:\sqrt{b}:\sqrt{c}::\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{mx+ny+pz}:\frac{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}{mx'+ny'+pz'}:\frac{\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2}}{mx''+ny''+pz''}$$

sein.

Auf Grund der Bedeutung der Zahlen a, b, c folgt, daß:

1. man jede von ihnen einzeln durch das Quadrat einer beliebigen Zahl multiplizieren oder dividieren kann;

2. alle gleichzeitig durch irgend einen Faktor multipliziert oder dividiert werden können.

---

*) Sulla legge di connessione ecc., Nuovo Cimento, vol. IV, pag. 93.

Man kann daher die Nenner des zweiten Teiles der oben geschriebenen Gleichungen vernachlässigen, und es wird nutzlos sein, wie es auch leicht ist, direkt zu sehen, mnp zu betrachten. Man wird daher der Allgemeinheit der Aufgabe nicht schaden, wenn man sie wie folgt ausdrückt:

Die folgenden Gleichungen, in denen a, b, c ganze Zahlen sind, [**139**] die man einzeln durch jede Quadratzahl und alle gleichzeitig durch irgend einen Faktor multiplizieren oder dividieren kann, mit ganzen Zahlen aufzulösen.

$$\text{(a)} \qquad \frac{x^2+y^2+z^2}{a}=\frac{x'^2+y'^2+z'^2}{b}=\frac{x''^2+y''^2+z''^2}{c}$$

$$\text{(b)} \qquad \begin{cases} xx' + yy' + zz' = 0 \\ x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0 \\ x''x + y''y + z''z = 0 . \end{cases}$$

Wir verdanken die Lösung dieser merkwürdigen analytischen Aufgabe einem tüchtigen Geometer, dem Advokaten *Genocchi*. Er findet, daß, um x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'' als ganze Zahlen zu erhalten, es genügt und nötig ist, drei ganze Zahlen u, v, t zu finden, die die Quotienten

$$\frac{u^2+ab}{c}, \quad \frac{v^2+bc}{a}, \quad \frac{t^2+ca}{b}$$

zu ganzen Zahlen machen, oder m. a. W.: das negative Produkt von zwei beliebigen der Zahlen a, b, c muß gleich dem quadratischen Rest*) der dritten sein.

Hieraus folgt folgender Satz:

Man kann aus dem monometrischen System jene Kristalltypen ableiten, die der erwähnten Hypothese über die Parameter genügen und, auf rechtwinklige Achsen reduziert, als Parameter die Wurzeln dreier solcher ganzer Zahlen erhalten, so daß das negative Produkt von irgend zwei unter ihnen dem quadratischen Rest der dritten gleich ist[10]).

11. Die Lösung *Genocchi*s kann man wie folgt kurz zusammenfassen.

*) Man nennt eine Zahl quadratischen Rest einer anderen, wenn die Differenz zwischen einer Quadratzahl und der ersten Zahl durch die zweite teilbar ist.

Man setze voraus, daß man die Zahlen a, b, c als frei nicht nur von jedem allen dreien gemeinsamen Faktor oder Quadratzahl, sondern auch von jedem zweien unter ihnen gemeinsamen Faktor betrachten kann. In der Tat, multipliziert man alle drei durch einen z. B. a und b gemeinschaftlichen Faktor und eliminiert dann die resultierenden Quadratfaktoren, so findet sich nur in c der a und b gemeinsame Faktor.

Setzt man

$$(\mathrm{a}')\quad \frac{x^2+y^2+z^2}{a}=\frac{x'^2+y'^2+z'^2}{b}=\frac{x''^2+y''^2+z''^2}{c}=k,$$

so ergibt sich, daß k nicht nur rational, sondern auch ganz sein wird, weil es nach der ersten Gleichung nur die Faktoren von a zum Nenner, nach der zweiten nur die von b und nach der dritten nur die von c haben könnte. Da nun a, b, c untereinander Primzahlen sind, so kann k keinen anderen Nenner als 1 haben.

Aus den Gleichungen (a) und (b), sowie auch aus der kristallographischen Aufgabe, die wir lösen wollen, folgt, daß

$$\frac{x^2}{ka},\ \frac{y^2}{ka},\ \frac{z^2}{ka};\quad \frac{x'^2}{kb},\ \frac{y'^2}{kb},\ \frac{z'^2}{kb};\quad \frac{x''^2}{kc},\ \frac{y''^2}{kc},\ \frac{z''^2}{kc}$$

die Quadratkosinus der von den Geraden $[xyz]$, $[x'y'z']$, $[x''y''z'']$ mit den [**140**] drei Koordinatenachsen gebildeten Winkel sind. Betrachten wir nacheinander die Kosinus der von einer Achse mit den drei genannten Geraden gebildeten Winkel, so wird

$$(\mathrm{c})\quad \frac{x^2}{a}+\frac{x'^2}{b}+\frac{x''^2}{c}=\frac{y^2}{a}+\frac{y'^2}{b}+\frac{y''^2}{c}=\frac{z^2}{a}+\frac{z'^2}{b}+\frac{z''^2}{c}=k$$

sein.

Da nun k eine ganze Zahl ist, a, b, c untereinander Primzahlen sind und keinen Quadratfaktor enthalten, so müssen die Quotienten

$$\frac{x}{a},\ \frac{y}{a},\ \frac{z}{a};\quad \frac{x'}{b},\ \frac{y'}{b},\ \frac{z'}{b};\quad \frac{x''}{c},\ \frac{y''}{c},\ \frac{z''}{c}$$

ganze Zahlen sein.

Aus dem Gesagten und aus den Gleichungen (a′) geht hervor, daß k durch abc teilbar und daher durch $k'abc$, wo k' eine ganze Zahl bedeutet, ersetzbar ist.

Bringen wir eine der Gleichungen (c) auf die Form

$$a\left(\frac{x}{a}\right)^2+b\left(\frac{x'}{b}\right)^2+c\left(\frac{x''}{c}\right)^2=k'abc.$$

Die rechte Seite und das dritte Glied der linken sind durch c teilbar; durch diese Zahl muß daher auch das Binom

$$a\left(\frac{x}{a}\right)^2+b\left(\frac{x'}{b}\right)^2$$

teilbar sein.

Sei θ irgend ein Primfaktor, der in c enthalten ist: er wird den neuen Unbekannten nicht gemeinsam sein, die man als frei von jedem gemeinschaftlichen Faktor betrachten kann. Nehmen wir an, daß θ z. B. x nicht teilt, so wird es x' ebenfalls nicht teilen, weil es das oben geschriebene Binom teilen muß.

Man kann daher die Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)=\left(\frac{x'}{b}\right)\alpha+\theta\beta$$

in bezug auf α und β mit ganzen Zahlen lösen: hieraus folgt

$$a\left(\frac{x}{a}\right)^2+b\left(\frac{x'}{b}\right)^2=\left(\frac{x'}{b}\right)^2(a\alpha^2+b)+2a\left(\frac{x'}{b}\right)\alpha\beta\cdot\theta+a\beta^2\cdot\theta^2.$$

Die linke Seite ist durch θ teilbar, es muß daher auch $\frac{a\alpha^2+b}{\theta}$ eine ganze Zahl sein.

Wird das Verfahren für jeden anderen in c enthaltenen Primfaktor wiederholt und ferner für jede der Zahlen a und b, so ergibt sich, daß die Auflösung möglich ist, wenn man drei ganze Zahlen $u'v't'$ finden kann, die die Quotienten

$$\frac{au'^2+b}{c},\quad\frac{bv'^2+c}{a},\quad\frac{ct'^2+a}{b}$$

ganz machen, die durch a, b, c multipliziert, mit den drei oben gegebenen übereinstimmen.

Daher ist es bewiesen, daß die erwähnten Bedingungen nötig sind: man muß noch beweisen, daß sie dazu hinreichen, daß die Aufgabe eine Auflösung besitze.

Man nehme an, daß solche Zahlen $u'v't'$, oder die anderen uvt gefunden sind, von denen man leicht zu den ersteren gelangt, weil, wenn z. B. $\frac{u^2+ab}{c}$ eine ganze Zahl ist, und die Gleichung

$$u=ra+cs$$

mit zwei ganzen Zahlen r und s aufgelöst wird, auch $\frac{a^2r^2+ab}{c}$ und daher auch $\frac{ar^2+b}{c}$ ganz sein werden, und daher der Wert $u'=r$ den Bruch $\frac{au'^2+b}{c}$ eine ganze Zahl macht.

[141] Die von *Lagrange**) für die Auflösung der Gleichung

$$x^2 - By^2 = Az^2$$

vorgeschlagene Methode wird uns dienen, die Gleichungen (a) und (b) aufzulösen, die man mit der einzigen folgenden

(d) $$k(a\alpha^2+b\beta^2+c\gamma^2)=$$
$$(\alpha x+\beta x'+\gamma x'')^2+(\alpha y+\beta y'+\gamma y'')^2+(\alpha z+\beta z'+\gamma z'')^2$$

ausdrücken kann, wo α, β, γ drei ganz unbestimmte Größen bedeuten.

Damit die Gleichung für jeden Wert von α, β, γ befriedigt sei, muß die linke Seite mit der rechten identisch sein; daher müssen die Gleichungen (a'), d. h. (a) und (b) befriedigt werden.

$a<b<c$ angenommen, sei

(e) $$\frac{au'^2+b}{c}=\varrho^2\vartheta,$$

wo ϱ^2 die größte Quadratzahl ist, die in dem von der linken Seite gegebenen Quotient enthalten ist. Sei a' der zu den zwei Zahlen ab und ϑ größte gemeinschaftliche Teiler, und man setze $ab=a'b'$, $\vartheta=a'c'$. Setzt man

(f) $$\alpha = u'\beta+\beta_1,$$

so ergibt sich

$$cc'\varrho^2(a\alpha^2+b\beta^2+c\gamma^2)=a'\left(cc'\varrho^2\beta+\frac{au'}{a'}\beta_1\right)^2+b'\beta_1^2+c^2c'\varrho^2\gamma^2$$

und

(h) $$cc'\varrho^2(a\alpha^2+b\beta^2+c\gamma^2)=a'\alpha_1^2+b'\beta_1^2+c'\gamma_1^2,$$

wenn

(g) $$\alpha_1=cc'\varrho^2\beta+\frac{au'}{a'}\beta \text{ und } \gamma_1=c\varrho\gamma$$

gesetzt wird.

*) *Legendre*, Théorie des nombres. Paris 1808, 35–42. Man kann für dasselbe Ziel auch Methoden anwenden, die *Gauss* in den Artikeln 294 und 295 seiner Disquisitiones arithmeticae mitgeteilt hat.

Aus den Gleichungen (f), (g), (e) hat man

(i) $\alpha_1 = \frac{au'}{a'}\alpha + \frac{b}{a'}\beta; \quad \beta_1 = \alpha - u'\beta; \quad \gamma_1 = c\varrho\gamma.$

Die Gleichung (e), nämlich

(e') $$au'^2 + b = a'cc'\varrho^2$$

zeigt, daß a' mit a keinen gemeinsamen Faktor haben kann, weil er auch mit b gemeinsam wäre, was mit der gemachten Hypothese in Widerspruch steht. Da $ab = a'b'$, so wird a' Teiler von b und dann nach Gleichung (e') auch von u'^2 und von u' sein, weil a keinen Quadratfaktor hat. Also sind alle Koeffizienten in den Gleichungen (i), die die neuen Unbekannten α_1, β_1, γ_1 ausdrücken, ganze Zahlen.

Dieselbe Gleichung (e') liefert den Quotienten

$$\frac{au'^2 + b}{c} \text{ und auch } \frac{(au')^2 + a'b'}{c'}$$

als ganze Zahlen.

Da nun $\frac{t^2 + ca}{b}$ eine ganze Zahl ist, so werden auch $\frac{t^2 + ca}{a'}$ und wegen (e')

$$\frac{t^2 + ca}{a'} \cdot c\varrho^2 = \frac{c'\varrho^2 t^2 + b'}{a'} + a^2\left(\frac{u'}{a'}\right)^2$$

ganze Zahlen sein.

Es wird daher der Quotient $\frac{(c'\varrho t)^2 + b'c'}{a'}$ ganz sein.

[142] Man bezeichne mit θ einen Primteiler von b'. Ist θ Faktor von a, so wird $\frac{v^2 + bc}{\theta}$ ganz sein, weil $\frac{v^2 + bc}{a}$ ganz ist: nach (e') ist

$$v^2 + bc = v^2 + a'c'c^2\varrho^2 - acu'^2$$

und daher wird auch $\frac{v^2 + a'c'c^2\varrho^2}{\theta}$ eine ganze Zahl sein. Nun sind c und ϱ mit θ Primzahlen, weil a mit c und auch mit ϱ Primzahl ist, wie es aus (e') hervorgeht: man kann daher zwei ganze Zahlen r und s finden, die die Gleichung

$$v = c\varrho s + \theta r$$

befriedigen. Hieraus folgt, daß $\frac{s^2 + a'c'}{\theta}$ ganz ist.

Ist θ dagegen Faktor von b, so wird $\frac{t^2 + ca}{\theta}$ ganz sein und daher auch

$$\frac{t^2 + ca}{\theta} a'c'\varrho^2 = \frac{a'c'\varrho^2 t^2 + a^2 u'^2 + ab}{\theta}.$$

Es wird daher auch $\frac{a'c'\varrho^2 t^2 + a^2 u'^2}{\theta}$ ganz sein.

Nun ist t gegen θ prim, weil ca gegen b und daher gegen θ prim ist: ϱ ist ebenfalls gegen θ prim, weil u' sonst auf Grund der Gleichung (e′) durch θ teilbar wäre, und daher wäre b durch θ^2 teilbar, was gegen unsere Hypothese ist. Man kann daher

$$au' = \varrho t s + \theta r$$

setzen, und es ergibt sich, daß $\frac{s^2 + a'c'}{\theta}$ eine ganze Zahl ist. Wird die Betrachtung für alle Primteiler von b' wiederholt, so wird man schließen, daß der Quotient $\frac{s^2 + a'c'}{b'}$ ganz werden kann, und da bewiesen wurde, daß das Gleiche für $\frac{(au')^2 + a'b'}{c'}$ und $\frac{(c'\varrho t)^2 + b'c'}{a'}$ der Fall ist, so folgt, daß für die neuen Koeffizienten a', b', c' der Gleichung (h) analoge Bedingungen erfüllt sind , wie jene, von denen man annahm, daß sie für die ursprünglichen Werte a, b, c Geltung haben.

In der Gleichung (e) kann man u' nicht $> \frac{1}{2}c$ annehmen, weil man sonst es durch $u' - cm$ oder $cm - u'$ ersetzen könnte, wo die ganze Zahl m so bestimmt wird, daß diese Differenz nicht $\frac{1}{2}c$ übersteigt. Wir werden also $\vartheta < \frac{1}{4}ac + 1$ und daher $a'c' < ac$ haben, während $a'b' = ab$ ist.

Wenn wir mit dem Trinom $a'\alpha_1^2 + b'\beta_1^2 + c'\gamma_1^2$ ebenso verfahren, wie mit $a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2$, so werden wir eine andere Vereinfachung und zu (h) und (i) analoge Gleichungen erhalten, so daß die neuen Unbestimmten α_2, β_2, γ_2 sich durch die ursprünglichen $\alpha\beta\gamma$ mit homogenen Funktionen vom ersten Grade und mit ganzen Zahlen als Koeffizienten ausdrücken lassen. Vollführt man in dieser Weise nach und nach andere Transformationen, so wird man die Koeffizienten der Quadrate der Unbestimmten auf 1 reduzieren, so daß eine Gleichung von der Form

$$k(a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2) = \alpha_m^2 + \beta_m^2 + \gamma_m^2$$

entsteht, [**143**] wo α_m, β_m, γ_m Ausdrücke bedeuten, die aus α, β, γ bestehen, wie es für die Glieder der rechten Seite der Gleichung (d) der Fall ist: die Koeffizienten dieser Ausdrücke werden ganze Zahlen sein, die man als Wert von $xx' \ldots z''$ annehmen kann, so daß die Aufgabe gelöst bleibt.

Wenn die Kenner der Theorie der quadratischen Formen den 295. Art. der Disquisitiones arithmeticae lesen, so werden sie leicht erkennen, daß es möglich ist, wenn den oben erwähnten Bedingungen genügt ist, zwei der Produkte ab, ac, bc auf zwei Summen von drei ganzen Quadratzahlen

$$f^2 + f'^2 + f''^2, \quad g^2 + g'^2 + g''^2$$

zurückzuführen, so daß

$$fg + f'g' + f''g'' = 0$$

sei.

Wenn man dies mit den gegebenen Werten von a, b, c nicht machen kann, so wird man schließen, daß die Aufgabe nicht lösbar ist; kann man es dagegen ausführen, so hat man die Auflösung

$$x = ag, \quad y = ag', \quad z = ag'',$$
$$x' = bf, \quad y' = bf', \quad z' = bf'',$$
$$x'' = f'g'' - g'f'', \quad y'' = f''g - fg'', \quad z'' = fg' - f'g;$$

wenn z. B.

$$ac = f^2 + f'^2 + f''^2, \quad bc = g^2 + g'^2 + g''^2$$

supponiert wird.

12. Fassen wir schließlich kurz zusammen:

Ist in einem gegebenen Kristallsystem das Produkt eines jeden Parameters mit sich selbst oder mit der Projektion irgend eines anderen Parameters auf ihn eine rationale Zahl, so hat man folgende Sätze:

Jede zu einer Kante senkrechte Ebene ist mögliche Fläche, und jede zu einer Fläche senkrechte Gerade ist mögliche Kante.

Das Verhältnis der Tangenten der von tautozonalen Flächen gebildeten Winkel ist rational.

An jedem Zwilling, an dem die Zwillingsachse eine Kante oder die zu einer Fläche Senkrechte ist, ist jede Fläche eines Individuums mögliche Fläche des anderen.

Jedes Kristallsystem mit schiefen Achsen kann von senkrechten Achsen abgeleitet werden.

Als für eine Substanz charakteristisches geometrisches Ellipsoid kann man eine Kugel annehmen.

Ist der Kristalltypus auf rechtwinklige Achsen reduziert, und erhält er solche Parameter, daß sie Wurzeln dreier solcher ganzen Zahlen sind, daß das negative Produkt von irgend zwei unter ihnen quadratischer Rest der dritten ist, so kann man den Kristalltypus vom monometrischen System ableiten.

13. Der Satz des 3. Art. wurde von *Neumann* für die orthogonalen und für das rhomboedrische System, von *Kupffer* für das monokline System und einige Spezialfälle des triklinen angegeben, und in seiner vollkommenen Allgemeinheit von *Naumann* *) ausgedrückt.

Letzterer zeigte auch an zahlreichen natürlichen monoklinen und triklinen Kristallen, daß den geometrischen Hypothesen über die Parameter, von denen der Satz des 3. Art. abhängig ist, wirklich genügt wird.

[144] Der von *Naumann* in seiner sehr wichtigen Arbeit befolgte Weg ist von dem von uns vorgeschlagenen ganz verschieden; wir glauben, daß die Vergleichung der beiden Methoden zeigen kann, daß die elementare Geometrie in der Kristallographie nicht nur geeignet ist, schöne und einfache Beweise zu liefern, sondern auch als wichtiges Forschungsmittel zu betrachten ist.

Naumanns Ausdruck der Bedingung, von der die Rationalität des Tangentenverhältnisses der Winkel der tautozonalen Flächen abhängig ist, ist von dem in dieser Abhandlung festgestellten verschieden, es ist aber leicht zu sehen, daß er in diesem letzteren enthalten ist.

Der Teil des Satzes des 5. Art., der sich auf die Kristallsysteme mit orthogonalen Achsen bezieht, ging schon aus den von *Naumann* in seinem ersten Lehrbuch der Kristallographie gegebenen Formeln hervor**). Es wurde ferner durch *Sénarmont****)

---

*) *Naumann*, Über die Rationalität der Tangentenverhältnisse tautozonaler Kristallflächen. Abhandlungen der K. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, IV, 507.

Hier sind auch für die von ihnen festgestellten Sätze erwähnt: *Neumann*, Beiträge zur Kristallonomie und *Kupffer*, Handbuch der rechnenden Kristallonomie; wir bedauern sehr, daß wir uns bis jetzt diese Abhandlungen nicht verschaffen konnten.

**) *Naumann*, Lehrbuch der Kristallographie, 1830, II. Band, S. 240.

***) *De Sénarmont*, Observations sur quelques groupements de cristaux du système régulier. Annales des Mines, 1848, (4) XIII Bd. S. 225.

Gegenstand einiger Anwendungen an regulären, natürlichen Kristallen; später wurde er für die orthogonalen und das rhomboedrische System, sowie für einige Spezialfälle des monoklinen und triklinen Systems in einem vor kurzem erschienenen Lehrbuch des tüchtigen und fleißigen Leipziger Kristallographen weiter entwickelt *).

Weiss war immer der Meinung, daß der Satz des 8. Art. auf jedes Kristallsystem mit schiefwinkligen Achsen, das uns die Natur zeigt, anwendbar sei.

14. Die geometrische Hypothese über die Parameter, von der so viele wichtige Eigenschaften der ihr entsprechenden Kristallsysteme bedingt werden, ist auch durch die einfachen Zahlen vieler Substanzen bestätigt. Man kann sie aber als vollkommen der Wahrheit entsprechend nur in Spezialfällen betrachten, weil man, da die Winkel kontinuierlich mit der Temperatur wechseln, nicht annehmen kann, daß die Parameter diskontinuierlich, wie die Quadratwurzel der ganzen Zahlen wechseln.

Wir werden jedoch bemerken, daß die Kristallsysteme der verschiedenen Substanzen sich unter einer begrenzten Zahl von Parametergruppen vereinigen, die um Quadratwurzeln von ziemlich einfachen Zahlen schwanken. Wenn wir nun noch bemerken, daß die Kristallmolekeln, durch Einwirkung einer anderen Temperatur als der ihrer Bildung, zusammengedrückt oder gedehnt werden, in einer relativen Lage sich befinden müssen, von jener verschieden, in der sie in der Zeit der Bildung des Kristalls sich befinden, so können wir schließen daß:

Es nicht unmöglich ist, daß die Molekularwirkungen, durch die Kristalle sich bilden, solche sind, daß sie Parametern Ursprung geben, die der im Anfang dieser Abhandlung gemachten Hypothese entsprechen.

---

*) *Naumann*, Elemente der theoretischen Kristallographie, Leipzig 1856.

Anmerkungen.

Der große italienische Kristallograph und Staatsmann *Quintino Sella* wurde am 27. Juli 1827 als Sohn von *Maurizio* und *Rosa Sella* zu Mosso Valle Superiore, im Kreise Biella geboren. Er besuchte das Gymnasium von Biella und studierte Ingenieurkunst an der Turiner Universität. Am 27. Juni 1847 trat er in den Stand der k. sardinischen Bergingenieure ein und ging nach Paris, um in der Ecole Nationale des Mines seine Studien zu vervollständigen. Diese Schule hatte damals berühmte Professoren, wie *Elie de Beaumont*, *Ebelmen*, *Sénarmont*: bei letzterem beschäftigte sich *Q. Sella* mit Kristallographie.

Nach einer Reise in England, Frankreich und Deutschland ins Vaterland zurückgekehrt, wurde er 1852 Professor der auf Kunstgewerbe angewandten Geometrie am technischen Institut in Turin. Als die Ingenieurschule in Turin begründet wurde, erhielt *Sella* den Lehrstuhl für Mineralogie, den er aber nur während eines Jahres einnahm. Seine bekannte politische Tätigkeit veranlaßte ihn, die Ingenieurschule zu verlassen.

Q. Sella starb am 14. März 1884 in Biella: er war Präsident der k. Accademia dei Lincei, als deren Wiederbegründer er anzusehen ist. Es ist noch des großen Anteils zu erwähnen, den er an der Begründung des italienischen Alpenklubs und des italienischen geologischen Komitees hatte.

Die wissenschaftliche Tätigkeit *Sellas* erstreckte sich besonders auf die Jahre 1856—1861: zu früh lenkte die Politik den Forscher von seinen geliebten Studien ab. Aber auch später veröffentlichte er noch einige mineralogische Arbeiten.

Die Arbeiten *Sellas* kann man in drei Gruppen teilen: 1) Studien über theoretische Kristallographie; 2) Untersuchungen über die Kristallographie künstlicher Verbindungen; 3) solche über Kristalle einiger Mineralien. Sie sind alle sehr wichtig,

so daß die Worte des berühmten Mathematikers *F. Brioschi*, in der Einleitung zur neuen von der Accademia dei Lincei veröffentlichten Auflage der Schriften *Sellas* *), vollkommen gerechtfertigt erscheinen. Er sagt: »es ist leicht vorauszusehen, daß alle Abhandlungen *Sellas* mehr oder minder in der Geschichte der Kristallographie werden erwähnt werden müssen«. Es genügt, unter den Arbeiten der 2. und 3. Abteilung die Studien über die Kristallform des Borcarbids, das von *St. Claire Deville* und *Wöhler* dargestellt war, und damals als Bor betrachtet wurde, zu erwähnen, während *Sella* in sehr scharfsinniger Weise die Möglichkeit äußert, daß es sich um eine Verbindung handelt; ferner die Studie über einige Basen, die *A. W. Hofmann* entdeckt hatte, und die wichtige Untersuchung einiger Platinammoniumsalze, aus der hervorging, daß die von *Reiset* und *Peyrone* dargestellten Verbindungen kristallographisch identisch sind, endlich die Studien über Kalkspat und Dolomit von Traversella, Anglesit aus Sardinien.

Die Arbeiten über theoretische Kristallographie wurden übersetzt. Sie sind besonders durch die Anwendung der elementaren Geometrie in der Kristallographie charakterisiert, was bis damals noch nicht geschehen war. Sie zeigten auch zum ersten Male, wie vorteilhaft die Anwendung der Determinanten ist, die viele Formeln sehr elegant auszudrücken gestatten. Es ist *Sellas* Verdienst, die Möglichkeit der Anwendung der elementaren Geometrie in kristallographischen Beweisen gezeigt zu haben, so daß das Studium der geometrischen Kristallographie bedeutend vereinfacht wurde; er zeigte auch, daß die elementare Geometrie als ein wichtiges Forschungsmittel in der Kristallographie zu betrachten sei.

Diese Arbeiten wurden zur Zeit ihres Erscheinens in hohem Grade anerkannt; *Miller* dehnt die von *Sella* angewandte Methode auf andere Sätze aus: doch ist es sicher, daß diese Arbeiten im Auslande später im allgemeinen wenig berück-

---

*) Die Wiederveröffentlichung der wichtigsten wissenschaftlichen Arbeiten *Q. Sellas* wurde von der Accademia dei Lincei in der Sitzung vom 15. Juni 1884 beschlossen. Diese Arbeiten bilden den zweiten Band der vierten Reihe der Memorie della classe di scienze fisiche, matematiche e naturali der genannten Akademie; er erschien 1886. Auf diese Angabe beziehen sich die eingeklammerten Seitenzahlen. Den Schriften *Sellas* ist eine sehr interessante und sorgfältige Rede von *A. Cossa* vorangestellt, die das Leben und die wissenschaftliche Tätigkeit *Q. Sellas* ausführlich behandelt.

sichtigt wurden *). In Italien fanden *Sellas* Methoden und die Anwendung der Determinanten eine bedeutende Verbreitung, besonders durch die Anregung *G. Strüvers* und seiner zahlreichen Schüler, aber im Auslande wurden selbst kristallographische Lehrbücher veröffentlicht, die, wie das von *v. Lang*, die elementare Geometrie fast ausschließlich anwenden, doch wurde *Sellas* Verdienst in dieser Richtung niemals erwähnt.

Ich hoffe, daß unsere deutsche Übersetzung zur Würdigung der theoretischen Arbeiten *Sellas* unter den Fachgenossen im Auslande beitragen wird.

1) *Zu S. 3.* Die erste Abhandlung führt den Titel: »Sulla legge di connessione delle forme cristalline di una stessa sostanza.« Sie bildet einen Teil einer ausführlichen Schrift über die Kristallformen des Rotgültigerzes, die in der Sitzung vom 10. Februar 1856 an der Turiner Akademie der Wissenschaften gelesen, aber nie veröffentlicht wurde. Der hier wiedergegebene Teil wurde in Nuovo Cimento, 1856 (1), 4 veröffentlicht.

Das Grundgesetz der geometrischen Kristallographie drückt man gewöhnlich auf zweierlei Art aus: entweder durch Achsen oder durch Zonen. Eine dritte Art ist das sogenannte Gesetz der rationalen Doppelverhältnisse**).

In vorliegender Abhandlung bewies *Sella* die zwei erstgenannten Ausdrücke mit Anwendung der elementaren Geometrie und gab einen neuen Ausdruck des Gesetzes, nämlich auf Grund eines Ellipsoids, dessen konjugierte Durchmesser drei Kristallkanten sind, deren Länge durch eine vierte Kristallfläche bestimmt ist. Es ist zu bemerken, daß dieser elegante Ausdruck fast niemals in den Lehrbüchern der Kristallographie erwähnt wurde, obwohl seine Wichtigkeit klar ist, besonders in bezug auf die Relationen mit anderen, die physikalischen Eigenschaften der Kristalle darstellenden Ellipsoide. *Q. Sella* hat in dieser Abhandlung nicht nur theoretische Fragen behandelt, sondern auch gezeigt, wie man in sehr einfacher und allgemeiner Weise wichtige Aufgaben auflösen kann, die bei der Zeichnung der Kristalle oder bei Anfertigung ihrer Modelle vorkommen. Diese Auflösungen waren bis dahin sehr ver-

*) In dem Lehrbuch der geometrischen Kristallographie von *Th. Liebisch* hat aber jedoch Determinantenrechnung eine große Anwendung gefunden.

**) Besonders über diese letztere Art sehe man die letzte Auflage der Physikalischen Kristallographie von *P. v. Groth* S. 315 ff.

wickelt; ferner hatten sie den Nachteil, nur für spezielle Fälle gültig zu sein: *Sella* beschäftigte sich dagegen mit der ganz allgemeinen Aufgabe.

2) *Zu S. 3.* Bei wörtlicher Übertragung des vom Verf. benutzten Ausdrucks bezeichnet hier »Kristallsystem« den Kristallflächenkomplex oder das System des Flächenkomplexes einer Substanz. »Kristalltypen« entspricht dem jetzt üblichen Ausdruck »Kristallsystem«.

3) *Zu S. 9.* Diese Aufgabe hat *Sella* in einer anderen Abhandlung, die den zweiten Teil dieses Heftes bildet, ausführlich behandelt.

4) *Zu S. 9.* »Vier Ebenen usw. gegeben«: es ist stillschweigend vorausgesetzt, daß sie nicht zu je dreien einer und derselben Geraden parallel sind.

5) *Zu S. 13.* Die vom Verf. für die verschiedenen Kristallsysteme angewandte Bezeichnungsweise ist zum Teil außer Italien wenig verbreitet. Monometrisches System bedeutet kubisches (reguläres) S.; dimetrisches S. = tetragonales S.; trimetrisches S. = rhombisches S. Die anderen Namen sind die gewöhnlichen.

Unter den Kristalltypen erwähnt *Sella* in diesem 13. Art. auch das dikline System, wie viele andere Kristallographen damals und auch später (so z. B. *Grailich* (1859), *Handl* (1859), *Schabus* (1862)) es taten. Dieses System hatte *Mitscherlich* begründet: seine Eigenschaften wären bekanntlich die des triklinen Systems, nur müßten zwei Koordinatenebenen rechtwinklig sein, und das der Schnittrichtung dieser beiden Ebenen parallele Prisma muß vierflächig sein. Besonders *Gadolin* *) bewies später, daß ein diklines System unmöglich ist, weil es nicht in die 32 Kristallklassen paßt.

6) *Zu S. 14.* Die zweite Abhandlung hat den Titel: »Sul cangiamento di assi in un sistema cristallino«. Dieser und der folgende Aufsatz wurden als Anhang (A) und (B) zur Abhandlung über die Kristallformen des Bors veröffentlicht, die an der Turiner Akademie der Wissenschaften in der Sitzung vom 14. Juni 1857 gelesen wurde: sie erschien in den »Memorie« dieser Akademie (1858 (2), **18**). Die Schrift über die Transformation der Achsen bildet den Anhang (A).

---

*) Abhandlung über die Herleitung aller kristallographischen Systeme usw. *Ostwalds* Klassiker Nr. 75, S, 46—47 — Deutsch herausgegeben von *P. von Groth.*

In diesem Anhang wurde der Gebrauch der Determinantenrechnung zum ersten Male vorgeschlagen, zur Darstellung der wichtigsten kristallographischen Formeln. *Sella* hat in glücklicher Weise die Vorteile der Methode an der Behandlung der so wichtigen und häufig vorkommenden Aufgabe der Transformation der Achsen erläutert.

7) *Zu S. 21.* Die dritte Abhandlung hat den Titel: »Sulle proprietà geometriche di alcuni sistemi cristallini«. Sie bildete den Anhang (B) zur Abhandlung über die Kristallformen des Bors.

In dieser Schrift leitet *Sella* eine Reihe wichtiger Eigenschaften der Kristallsysteme her, die nur z. T. oder garnicht in ihrer vollkommenen Allgemeinheit früher erwähnt worden waren.

Die zugrunde gelegte Hypothese über die Parameter ist in der Natur nur annähernd erfüllt, mit Ausnahme von Spezialfällen. Als *Sella* diese Arbeit veröffentlichte, hielt man diese Hypothese, wenn auch unter anderer Form, für vollkommen genau: so hatte *Weiss* geäußert, die Grundparameter könnten in den Kristallsystemen mit rechtwinkligen Achsen nur in Quadratwurzelgrößen ihren naturgemäßen Ausdruck finden, und *Naumann* hatte keinen Zweifel, daß die Grundparameter andere als rationale Zahlwerte oder Quadratwurzelwerte haben könnten. *Sella* ist aber in seinen Äußerungen viel weniger entschieden als *Naumann*, und im 14. Art. sagt er ausdrücklich, daß man die in Rede stehende Hypothese nicht als vollkommen der Wahrheit entsprechend betrachten dürfe, und so ist er vor vielen Jahren der Beurteilung der Kristallographen vorausgegangen.

Obwohl die geometrischen Eigenschaften, die *Sella* in dieser Abhandlung behandelt, nicht allgemein oder nur annähernd gültig sind, da sie nur auf Grund der genannten Hypothese bestehen, die nur in Spezialfällen genau befriedigt ist, so sind sie doch sehr wichtig, denn die Hypothese über die Parameter kommt in vielen Fällen der Wahrheit sehr nahe. Ferner können die Sätze, die in dieser dritten Abhandlung behandelt sind, in der Untersuchung der Zwillinge von großem Nutzen sein, wie dies *Sella* am tetragonalen, diamantartigen Bor zeigt.

8) *Zu S. 24.* Dieses Gesetz ist kein a l l g e m e i n e s Naturgesetz; es gilt bekanntlich genau und in ganzer Allgemeinheit nur für das reguläre System, in dem die Hypothese über die Parameter befriedigt ist; die Formel, die die Tangente des von zwei Flächen einer Zone gebildeten Winkels gibt, enthält nur die Indizes der Flächen selbst, und zwar ganze Zahlen.

Der Beweis *Sellas* ist viel kürzer, einfacher und eleganter als der *Naumanns* *), daher erscheint *Sellas* Bemerkung, die Vergleichung der beiden Methoden zeige die Vorteile der Anwendung der elementaren Geometrie in der Kristallographie, vollkommen gerechtfertigt.

9) *Zu S. 28.* Dieses Theorem hatte zu *Sellas* Zeit große Wichtigkeit, weil das monokline System von vielen als Hemiedrie des rhombischen Systems, und das trikline System als Tetartoedrie desselben Systems betrachtet wurde. Die Anwendung recktwinkliger Achsen für monokline und trikline Substanzen war üblich. Erst viele Jahre später erkannte man, daß der Wert 90° für die Achsenwinkel keine höhere Bedeutung als jeder andere einzelne Winkelwert habe, besonders wenn man bedenkt, worauf *P. Groth* **) hingewiesen hat, daß diese Winkel mit der Temperatur veränderlich sind.

10) *Zu S. 30.* Vom theoretischen Standpunkte aus ist die Untersuchung der Bedingungen interessant, die erfüllt werden müssen, damit ein Kristalltypus sich vom regulären System herleiten lasse. Auch lange Zeit nach dieser Arbeit *Sellas* hat diese Aufgabe die Aufmerksamkeit der Forscher erregt.

---

*) *Naumann*, wandte zuerst dieses »Gesetz« in seiner Allgemeinheit an.

**) Anmerkungen zu *Gadolins* Abhandlung über die Herleitung usw. *Ostwalds* Klassiker Nr. 75, S. 92.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

Nr. 92. **H. Kolbe,** Über den natürlichen Zusammenhang der organ. mit den unorganisch. Verbindungen, die wissenschaftliche Grundlage zu einer naturgemäßen Klassifikation der organ. chemischen Körper. (1859.) Herausgegeben von Ernst von Meyer. (42 S.) ℳ —.70.

» 94. **E. Mitscherlich,** Über das Verhältnis zwischen der chemischen Zusammensetzung u. der Kristallform arseniksaurer und phosphorsaurer Salze. (1821.) Herausgeg. von P. Groth. Mit 35 Figuren im Text. (59 S.) ℳ 1.—.

» 98. —— Über das Benzin und die Verbindungen desselben. (1834.) Herausgegeben von J. Wislicenus. (39 S.) ℳ —.70.

» 100. **G. Kirchhoff,** Emission u. Absorption: 1. Fraunhofersche Linien. (1859.) — 2. Zusammenhang zwischen Emiss. u. Absorption. (1859.) — 3. Verhältnis zwischen Emiss.- u. Absorptionsvermögen der Körper für Wärme u. Licht. (1860—1862.) Herausg. v. Max Planck. Mit dem Bildniss von G. Kirchhoff u. 5 Textfiguren. (41 S.) ℳ 1.—.

» 104. **C. M. Guldberg** und **P. Waage,** Untersuch. über die chemischen Affinitäten. Abhandl. aus den Jahren 1864, 1867, 1879. Übersetzt und herausg. von R. Abegg. Mit 18 Tafeln. (182 S.) ℳ 3.—.

» 114. **Alessandro Volta,** Briefe über tierische Elektrizität. (1792.) Herausg. von A. J. von Oettingen. (162 S.) ℳ 2.50.

» 118. —— Untersuch. über den Galvanismus. (1796—1800.) Herausgeg. von A. J. von Oettingen. (99 S.) ℳ 1.60.

» 124. **H. Helmholtz,** Abhandlungen zur Thermodynamik. Herausgegeben von Dr. Max Planck. (84 S.) ℳ 1.40.

» 125. **John Mayow,** Untersuch. üb. d. Salpeter u. d. salpetrigen Luftgeist, d. Brennen u. das Atmen. Hrsg. v. F. G. Donnan. (56 S.) ℳ 1.—.

» 132. **Thomas Andrews,** Kontinuität der gasförmigen und flüssigen Zustände der Materie und über den gasförmigen Zustand der Materie. Herausg. von A. v. Oettingen und Kenji Tsuruta aus Japan. Mit 12 Textfiguren. (82 S.) ℳ 1.40.

» 134. **Michael Faraday,** Experim.-Unters. Hrsg. v. A. J. v. Oettingen. XVI. u. XVII. Reihe. Gegen Contacttheorie. Mit 18 Textfig. (103 S.) ℳ 1.60.

» 136. —— —— XVIII. u. XIX. Reihe. Drehg. d. Polaris.-Ebene. Mit 11 Textfig. (58 S.) ℳ 1.20.

» 137. **August Horstmann,** Abhandl. zur Thermodynamik chem. Vorgänge. Herausg. v. I. H. van't Hoff. Mit 4 Textfiguren. (72 S.) ℳ 1.20.

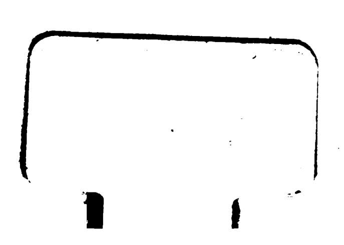
» 139. **C. M. Guldberg,** Thermodynamische Abhandl. über Molekulartheorie u. chemische Gleichgewichte. Drei Abhandlungen aus den Jahren 1867, 1868, 1870, 1872. Aus dem Norwegischen übersetzt und herausg. von R. Abegg. Mit 9 Textfiguren. (85 S.) ℳ 1.50.

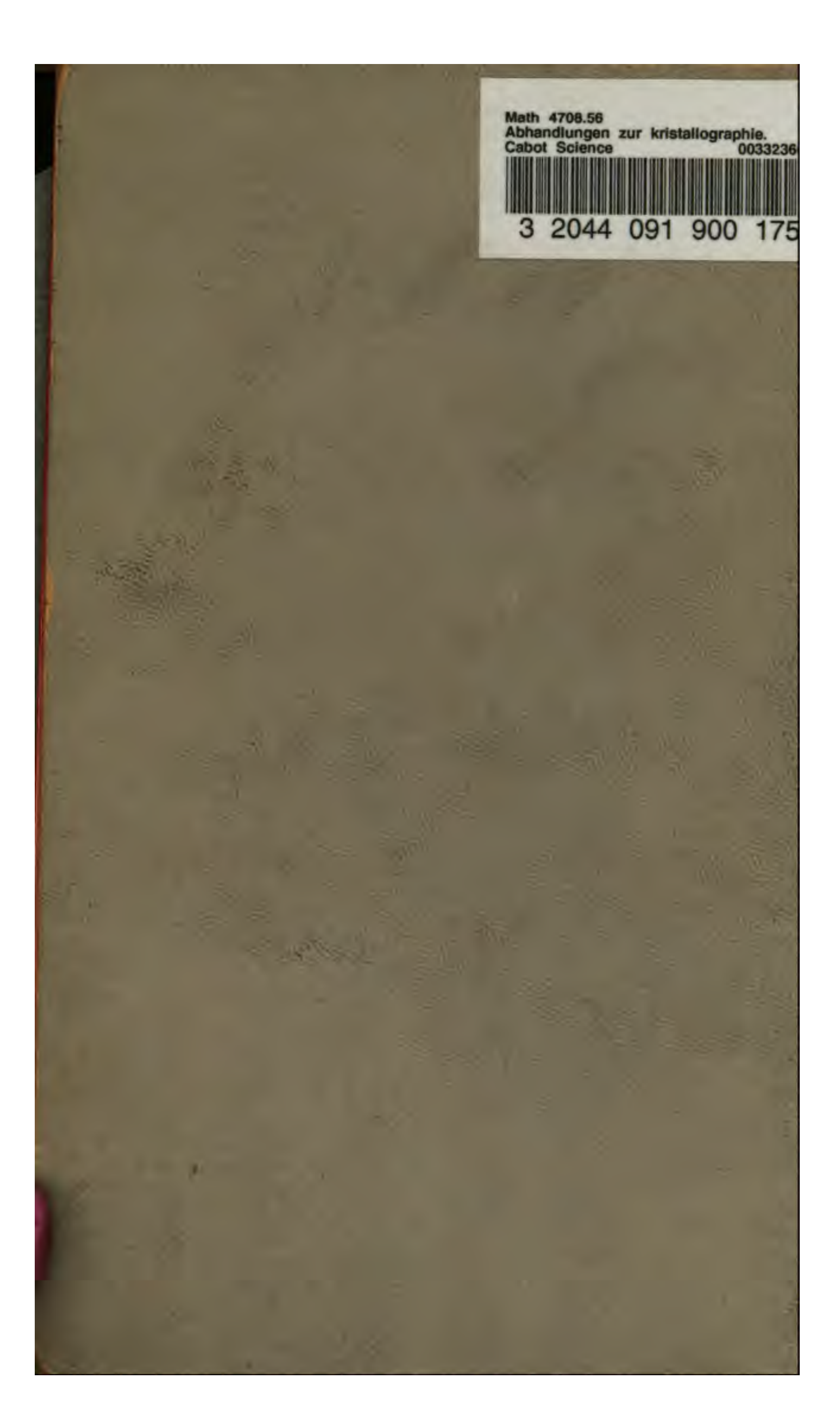
» 145. **August Kekulé,** Über die Konstitution u. die Metamorphosen der chem. Verbindungen u. über die chem. Natur d. Kohlenstoffs. Untersuch. über aromatische Verbindungen. Herausgeg. von A. Ladenburg. Mit 2 Textfiguren u. einer Tafel. (89 S.) ℳ 1.40.

» 150. **Joseph Fraunhofer,** Bestimmung des Brechungs- und Farbenzerstreuungs-Vermögens verschied. Glasarten in bezug auf die Vervollkommnung achromatischer Fernröhre. Herausgegeben von A. v. Oettingen. Mit einem Bildnis, 6 Figuren im Text und 2 Figuren auf einer Tafel. (36 S.) ℳ 1.20.

» 152. **Theodor von Grotthuß,** Abhandlungen über Elektrizität und Licht. Herausgegeben von R. Luther und A. v. Oettingen. Mit einem Bildnis und 5 Textfiguren. (199 S.) ℳ 3.—.

» 155. **Quintino Sella,** Abhandlungen zur Kristallographie. Herausgegeben von F. Zambonini in Neapel. Mit 8 Textfiguren. (44 S.) ℳ —.80.




Math 4708.56
Abhandlungen zur kristallographie.
Cabot Science 0033236
3 2044 091 900 175